논리연구 22-3(2019) pp. 417-446

『논리-철학 논고』의 연산 이론에 관하여*

박 정 일

【국문요약】 비트겐슈타인의 『논리-철학 논고』에서 “연산 이론”은 『논고』의 수학 철학의 핵심적 토대다. 비트겐슈타인은 연산 이론을 바탕으로 6.02에서 기수의 정의를 제시하고 있고, 6.241에서 연산 이론을 이용하여 “2 × 2 = 4”의 증명을 제시한다. 그렇기 때문에 『논고』의 수학 철학을 정확하게 해명하기 위해서는 『논고』의 연산 이론에 대한 철저한 이해가 요구된다. 그리하여 나는 이 글에서 『논고』의 수학 철학을 해명하기 위한 예비적인 작업으로서 『논고』의 연산 이론을 해명하고자 한다. 이러한 과정에서 우리는 6.241에 대한 프래스콜라의 재구성과 해석에서 그의 중요한 기여와 오류들을 확인할 수 있다. 특히 우리는 6.241에서 비트겐슈타인이 실수를 하게 된 배경과 그가 6.241에서 연산 이론의 덧셈 연산을 다루었다는 것을 이해할 수 있고 이를 토대로 6.241을 올바르게 재구성할 수 있다.

【주요어】 비트겐슈타인, 『논리-철학 논고』, 연산 이론, 프래스콜라, 6.02, 6,241

---

*투고일: 2019. 8. 19 심사 및 수정완료일: 2019. 10. 17 게재확정일: 2019. 10. 19

1. 들어가는 말

비트겐슈타인의 『논리-철학 논고』(이하, ‘『논고』’로 약칭함)에서 “연산 이론”(operation theory, theory of operations)[1]은 『논고』의 수학 철학의 핵심적 토대다. 비트겐슈타인은 연산 이론을 바탕으로 6.02에서 기수의 정의를 제시하고 있고, 6.241에서 연산 이론을 이용하여 “2 × 2 = 4”의 증명을 제시한다. 그렇기 때문에 『논고』의 수학 철학을 정확하게 해명하기 위해서는 『논고』의 연산 이론에 대한 철저한 이해가 요구된다. 그리하여 나는 이 글에서 『논고』의 수학 철학을 해명하기 위한 예비적인 작업으로서 『논고』의 연산 이론을 해명하고자 한다.

그런데 『논고』의 연산 이론을 이해하는 것은 결코 쉽지 않다. 그 어려움은 무엇보다도 『논고』의 서술이 매우 압축적이고 난해하다는 점에도 있지만, 사실상 더 중요한 것은 도저히 넘어설 수 없는 것처럼 보이는 장애물이 우리 앞을 가로막기 때문이다. 구체적으로 말하면 이러하다: 우리는 『논고』 6.241을 어떻게 이해해야 하는가?

> 예컨대 2 × 2 = 4라는 명제의 증명은 다음과 같다 :
>
> $$(\Omega^{\nu})^{\mu'}x = \Omega^{\nu \times \mu'}x \qquad \text{Def.}$$
>
> $$\Omega^{2 \times 2'}x = (\Omega^{2})^{2'}x = (\Omega^{2})^{1+1'}x = \Omega^{2'}\Omega^{2'}x = \Omega^{1+1'}\Omega^{1+1'}x$$
> $$= (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1'}x = \Omega^{4'}x. \text{ (6.241)[2]}$$

---

1) 나는 프래스콜라(P. Frascolla)와 매리언(M. Marion)을 따라 이 용어를 채택하고 있다. 참고: Frascolla (1994), pp. 1-41. Marion (1998), pp. 21-29.

2) 이 글에서는 『논고』의 번역으로 대부분 비트겐슈타인(2006), 이영철 옮김을 따르고 있다.

매리언(M. Marion)은 프래스콜라(P. Frascolla)가 6.241을 올바르게 재구성했다고 주장한다.[3] 그러나 과연 이러한 매리언의 주장은 옳은가? 나는 그렇지 않다고 생각한다. 물론 (나중에 살펴보겠지만) 프래스콜라는『논고』의 연산 이론과 특히, 6.241에 대해서 몇몇 중요한 기여를 하였다. 그러나 6.241에 대한 그의 재구성은 부분적으로 옳을 뿐이다.

하여 나는 이 글에서 다음을 보이고자 한다. 첫째, 프래스콜라는 6.241의 두 번째 등식과 일곱 번째 등식에서 6.02의 기수에 대한 정의가 사용되었다고 간주한다. 그러나 여기에서 사용된 것은 연산 이론에서의 "축약 규칙"이다. 또한 비트겐슈타인이 6.02에 나오는 "ν"를 수 변항으로 사용하고 있다는 그의 주장은 옳지 않다. 둘째, 프래스콜라는 6.241에서 비트겐슈타인이 덧셈의 연산을 간과하였다고 주장한다. 그러나 이는 그렇지 않다. 6.241에는 덧셈 연산이 이미 전제되어 있으며, 충분히 암시되어 있다. 셋째, 6.02를 바탕으로 6.241을 살펴볼 때 6.241에서 우리로 하여금 참으로 난감하게 만드는 것은 두 번째 등식에서 등장하는 "1 + 1"과 일곱 번째 등식에서 등장하는 "1 + 1 + 1 + 1"이다. 그런데 이것들은 오자다. 비트겐슈타인이 썼어야 했던 것은 그것들이 아니라 각각 "0 + 1 + 1"과 "0 + 1 + 1 + 1 + 1"이다.

나는 다음의 순서로 논의하고자 한다. 먼저 우리는『논고』에서 연산과 형식 계열의 개념이 도입되는 과정을 살펴보아야 한다. 연산은 형식 계열의 항들을 배열하게 하는 내적 관계와 대등하다(2절). 연산의 계속적 적용의 개념을 토대로 6.02에서는 기수의 정의

---

3) Marion (1998), p. 29. 각주 5. 블랙(M. Black)은 6.241에 대해서 "괴상하며(eccentric) 수학적 엄밀성의 현대적 표준들을 만족시키지 않게 될 것"(Black (1964), p. 343)이라고 논평하는데, 이에 대해 매리언은 각주 5에서 "그것[6.241]에 대한 그[블랙]의 이해의 결여를 그저 드러내고 있을 뿐"이라고 평가한다.

가 제시된다. 그런데 이 기수의 정의는 심각한 문제를 불러일으킨다. 즉 그 정의는 순환적인 정의가 아닌가? 그렇게 되면 우리는 자연스럽게 산수의 언어와 연산 이론의 언어가 상이하다는 것을 깨닫게 되며, 6.02의 “ν”에 대한 앤스컴(G. E. M. Anscombe)과 프래스콜라의 파악이 둘 다 옳지 않다는 것을 알게 된다(3절). 다음으로 나는 프래스콜라가 어떻게 6.241을 재구성했는지를 살펴보고자 한다. 이러한 과정에서 우리는 그의 중요한 기여와 오류의 징후들을 확인하게 된다(4절). 6.241에 대한 프래스콜라의 재구성을 이해하게 되면 비로소 우리는 6.241의 두 번째 등식에서 나오는 “1 + 1”과 일곱 번째 등식에서 나오는 “1 + 1 + 1 + 1”이 참으로 불가사의하다는 것을 깨닫게 된다. 이러한 불가사의는『논고』6.02에 해당되는『원논고』6.011을 이해하면 해소된다. 더 나아가『논고』6.02와『원논고』6.011을 비교하면 우리는 왜 비트겐슈타인이 후자를 전자로 수정했는지 그 이유를 이해할 수 있다(5절). 그러한 이유를 알게 되면 비로소 우리는 6.241에서 연산의 지수들의 덧셈 연산이 전제되어 있다는 것을 이해할 수 있고, 6.241을 토대로 연산 이론에서의 합성 연산에 대한 변형 규칙과 연산의 지수들의 덧셈 연산의 정의를 제시할 수 있으며(6절), 이를 바탕으로 6.241을 올바르게 재구성할 수 있다(7절).

2. 연산과 형식 계열

비트겐슈타인은『논고』에서 다음의 과정을 거쳐 연산의 개념을 도입한다. 먼저 그는 내적 속성(관계)과 외적 속성(관계)을 구분한다. 가령 a라는 반점이 파랗다고 할 때 “a는 파랗다”라고 말하면, 그 “명제는 사태의 기술”(4.023)이고, 그 기술은 a라는 대상을 그 외적 속성에 따라서 기술한 것(4.023)이다(a가『논고』의 “대상”이라

고 가정하자). 또한 b라는 반점이 파랗다고 할 때, a의 파랑과 b의 파랑은 “마땅히 더 밝고 더 어둡다는 내적 관계에 있다.”(4.123) 비트겐슈타인에 따르면 “어떤 속성을 지닌 대상이 그것을 소유하지 않는다고는 생각될 수 없다면, 그 속성은 내적이다.”(4.123) 그리하여 가령 ““(1 + 1) + (1 + 1)”로서 파악될 수 있다는 것은 “1 + 1 + 1 + 1”의 한 속성”(6.231)인데, 물론 이 속성은 내적 속성이다.[4)]

다음으로 비트겐슈타인은 “내적 관계”의 개념을 바탕으로 “형식 계열”의 개념을 도입하고, 이와 함께 “형식적 속성”의 개념을 바탕으로 “형식적 개념”을 도입한다. “내적 관계에 의해서 배열된 계열을 나는 형식 계열이라고 부른다.”(4.1252) “0, 1, 2, 3, ……”은 “y는 x의 직후자이다”라는 내적 관계에 의해 배열된 형식 계열이다. “x의 직후자”라는 연산을 “Sx”로 나타내면, 이 형식 계열은 “0, S0, SS0, SSS0, ……”으로 나타낼 수 있다. 이때 0은 연산 S의 토대이고, S0는 연산 S를 0에 적용한 결과이며 SS0는 S를 0에 적용한 결과인 S0에 다시 연산 S를 적용한 결과이다. “연산은 연산 결과의 구조와 연산 토대의 구조 사이의 어떤 한 관계의 표현이다.”(5.22) 그리하여 주어진 형식 계열에서는 항들을 배열하게 하는 내적 관계와 주어진 토대로부터 항들을 계속 산출하게 하는 연산은 대등한 것으로 파악될 수 있다. “어떤 한 계열을 배열하는 내적 관계는 한 항을 다른 항에서 생겨나게 하는 연산과 대등하다.”(5.232) 형식적 속성들은 “형식적 개념들의 표지들”(4.126)이다. 예컨대 “(1 + 1) + (1 + 1)”로서 파악될 수 있다는 것은 “1 + 1 + 1 + 1”이라는 형식적 개념의 한 형식적 속성(6.231)이다. 특히 형식 계열의 항이라는 개념은 형식적 개념이다(4.1273).

다음으로 비트겐슈타인은 “연산의 계속적 적용”의 개념과 “형식

---

4) 『논고』에서는 내적 속성(관계)은 구조적 속성(관계), 형식적 속성(관계)(4.122)과 같고, 외적 속성(관계)은 실질적 속성(관계)(2.0231), 고유 속성(관계)(4.122, 4.126)과 같다.

계열의 일반항”의 개념을 다음과 같이 설명한다.

> 어떤 연산을 그 자신의 결과에 연속적으로 적용하는 것을 나는 그 연산의 계속적 적용이라고 부른다(“*O*’ *O*’ *O*’a”는 “*O*’ξ”를 “a”에 세 번 계속 적용한 결과이다).
>
> 비슷한 뜻에서 나는 일정한 수의 명제들에 대한 여러 연산들의 계속적 적용에 대해서 이야기한다. (5.2521)

> 따라서 나는 형식 계열 a, *O*’a, *O*’ *O*’a, ……의 일반항을 “[a, x, *O*’x]”라고 쓴다. 이 괄호 표현은 하나의 변항이다. 괄호 속의 첫 번째 항은 형식 계열의 시작이고, 두 번째 항은 계열의 임의의 항 x의 형식이며, 세 번째 항은 x를 바로 뒤따르는 계열 항의 형식이다. (5.2522)

비트겐슈타인은 형식 계열의 초항 a에 연산 *O*를(또는 연산 *O*’ξ를) 한 번 적용한 결과를 “*O*’a”로 나타내고 있고, 두 번 계속 적용한 결과를 “*O*’ *O*’a”로 나타내고 있으며, 세 번 계속 적용한 결과를 “*O*’ *O*’ *O*’a”로 나타내고 있다. 이렇게 연산을 계속적으로 한없이 적용하게 될 때, 비트겐슈타인에 따르면, “연산의 계속적 적용이라는 개념은 “등등”의 개념과 대등하다.”(5.2523) 또한 비트겐슈타인은 형식 계열 a, *O*’a, *O*’ *O*’a, ……의 일반항을 “[a, x, *O*’x]”로 표기하고 있다.[5)]

그렇다면 가령 “*O*’a”나 “*O*’ *O*’a”에서 “ ’ ”, 즉 오른쪽 따옴표는 무엇을 뜻하는가? 앤스컴과 프래스콜라가 지적하듯이, 그것은

5) 비트겐슈타인은 변항 x를 생략한 채 f가 함수라고 말하고(5.5301), fx가 함수라고 말하기도 하며(5.501, 5.52), F(fx)가 함수라고도 말한다(3.333). 마찬가지로 그는 변항 ξ를 생략한 채 O, Ω, 동시 부정 N, 부정 ~ 등을 연산이라고 부르고, O’ξ가 연산이라고 부르기도 하며(5.2521), $(\Omega'\Omega)'x$를 연산이라고 간주한다. F(fx)가 합성 함수인 것과 마찬가지로, (나중에 살펴보겠지만) $(\Omega'\Omega)'x$는 합성 연산이다. 참고: 박정일 (2017), p. 168.

비트겐슈타인이 러셀과 화이트헤드의 『수학 원리』로부터 빌려온 것이다. 러셀은 가령 “R”이 2항 관계일 때, “R‘x”를 x와 관계 R을 갖고 있는 유일한 대상 y로 정의한다.[6] 다시 말해 그것은 러셀에게는 기술 함수이며, R‘a는 a의 그 R(the R of a)이다. 그러나 이미 언급했듯이, 형식 계열의 항들은 내적인 관계에 있으므로, 비트겐슈타인의 “*O*’a”에서의 “*O*”는 러셀의 “R‘x”의 “R”과는 다르다. 즉 러셀은 내적이든 외적이든 모든 관계 “R”에 대해서 기술 함수를 거론하고 있지만, 비트겐슈타인은 형식 계열을 주목함으로써 엄격하게 “*O*”를 내적 관계에 한정하고 있는 것이다.

앞에서 우리는 형식 계열 “0, S0, SS0, SSS0, ……”을 살펴보았다. 이 형식 계열은 이제 오른쪽 따옴표 “ ’ ”를 염두에 둔다면, 다음으로 바꿀 수 있다.

0, S’0, S’S’0, S’S’S’0, ……

그리고 이 형식 계열의 일반항은 다음과 같다.

[0, x, S’x]

이 형식 계열과 그 일반항은 비트겐슈타인이 제시한 형식 계열 a, *O*’a, *O*’*O*’a, ……와 그 일반항 “[a, x, *O*’x]”의 한 예이다. 다시 말해 우리는 **연산 변항**과 **연산 상항**을 구분해야만 한다.[7] 5.2521과 5.2522에 나오는 “*O*”와 6.02에 나오는 “*Ω*”는 연산 변항이다. 반면에 (위에서 제시된) “S“, 동시 부정 “N”, 부정 “～” 등은 연산

6) Anscombe (1959), p. 124 각주, Frascolla (1994), pp. 8-9, Marion (1998), p. 27, Russell & Whitehead (1910), p. 32.

7) 프래스콜라는 6.02에 나오는 “*Ω*”가 연산 변항이라는 것을 올바르게 지적하고 있다. 참고: Frascolla (1994), p. 2.

상항이다. 비트겐슈타인은 러셀의 기술 함수 형태의 연산을 표기하는 경우에는 오른쪽 따옴표 " ' "를 사용하고 있지만, 반면에 러셀의 명제 함수 형태의 연산을 표기하는 경우에는 괄호 "(　)"를 사용하며, 어떤 경우에는 괄호를 생략하기도 한다. 그리하여 우리는 O'a, N(p), ~~p 등의 표기법을 이해할 수 있다.8)

3. 연산과 수

그러면 이제 이러한 연산 개념을 통하여 비트겐슈타인이 어떻게 기수를 정의했는지를 살펴보기로 하자. 그는 먼저 명제의 일반적 형식(6, 6.001)과 한 명제로부터 다른 명제로의 이행의 가장 일반적인 형식(6.002, 6.01)에 대해 논의한 후에, 6.02에서 수의 정의를 제시한다.

> 그리고 그렇게 해서 우리는 수에 도달한다. 나는 다음과 같이 정의한다.
>
> $$x = \Omega^{0'}x \qquad \text{Def.}$$
>
> 그리고
>
> $$\Omega'\Omega^{\nu'}x = \Omega^{\nu+1'}x \qquad \text{Def.}$$
>
> 그러므로 우리는 이러한 기호 규칙들에 따라 계열 $x, \Omega'x, \Omega'\Omega'x, \Omega'\Omega'\Omega'x,$ ……를 다음과 같이 쓴다. 즉
>
> $$\Omega^{0'}x, \Omega^{0+1'}x, \Omega^{0+1+1'}x, \Omega^{0+1+1+1'}, \cdots\cdots.$$
>
> 그러므로 나는 "$[x, \xi, \Omega'\xi]$" 대신에 다음과 같이 쓴다 :
>
> "$[\Omega^{0'}x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$"

8) 앤스컴은 『논고』에서는 " ' "의 사용이 불필요하다고 간주한다(Anscombe (1959), p. 124 각주). 그러나 이는 옳지 않다. 따옴표와 괄호는 연산 이론에서 반드시 필요하다. 특히 합성 연산을 표현할 때 그러하다. 앤스컴은 '2 + 2 = 4'를 '$\Omega^2\Omega^2x = \Omega^4x$'로 표기하고 있는데(p. 125), 이렇게 따옴표와 괄호를 사용하지 않으면 덧셈 연산과 곱셈 연산은 구분되지 않을 것이다.

그리고 다음과 같이 정의한다 :

$0 + 1 = 1$ Def.

$0 + 1 + 1 = 2$ Def.

$0 + 1 + 1 + 1 = 3$ Def.

(등등) (6.02)

비트겐슈타인에 따르면, 형식 계열 $x, \Omega' x, \Omega' \Omega' x, \Omega' \Omega' \Omega' x$, ……는 귀납적 정의 즉,

$$x = \Omega^{0'} x \qquad \text{Def.}$$
$$\Omega' \Omega^{\nu'} x = \Omega^{\nu + 1'} x \qquad \text{Def.}$$

에 의해 $\Omega^{0'} x, \Omega^{0+1'} x, \Omega^{0+1+1'} x, \Omega^{0+1+1+1'}$, …… 으로 바꾸어 쓸 수 있다. 이 귀납적 정의에서 피정의항은 우변이고, 정의항은 좌변임을 명심하자. 그러면 이제 왜 전자의 형식 계열이 후자의 형식 계열로 바꿔어 쓸 수 있는지 확인하기로 하자. 첫 번째 정의에서 $\Omega^{0'} x$가 정의되었으므로, 두 번째 정의에서 먼저 ν에 0을 대입하자. 그러면 우리는

$$\Omega' \Omega^{0'} x = \Omega^{0+1'} x$$

를 얻는다. 이것은 $\Omega^{0'} x$의 정의에 따라 다음과 같다.

$$\Omega' x = \Omega^{0+1'} x$$

이제 $\Omega^{0+1'} x$가 정의되었으므로, 두 번째 정의에서 ν에 $0 + 1$을 대입하자. 그러면 우리는 다음을 얻는다.

$$\Omega'\Omega^{0+1'}x = \Omega^{0+1+1'}x$$

그러면 이는 $\Omega^{0+1'}x$의 정의에 따라 다음과 같다.

$$\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1'}x$$

이와 같은 방식을 반복하면 우리는 다음을 얻을 수 있다.

$$\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1+1'}x$$
$$\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1+1+1'}x$$
……

그리하여 $x, \Omega'x, \Omega'\Omega'x, \Omega'\Omega'\Omega'x,$ ……는 $\Omega^{0'}x, \Omega^{0+1'}x,$ $\Omega^{0+1+1'}x, \Omega^{0+1+1+1'}$, …… 으로 표기된다. 이제 전자의 형식 계열의 일반항은 $[x, \xi, \Omega'\xi]$이고, 후자의 형식 계열의 일반항은 $[\Omega^{0'}x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$라는 것을 주목하자. 그리하여 비트겐슈타인은 다음과 같이 말한다. "그러므로 나는 "$[x, \xi, \Omega'\xi]$" 대신에 다음과 같이 쓴다: "$[\Omega^{0'}x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$"."

그 다음에 비트겐슈타인은 다음과 같이 말한다.

> 그리고 다음과 같이 정의한다 :
>
> $0 + 1 = 1$ Def.
>
> $0 + 1 + 1 = 2$ Def.
>
> $0 + 1 + 1 + 1 = 3$ Def.
>
> (등등)

이러한 정의를 제시한 후에 곧바로 비트겐슈타인은 "수는 연산의 지수이다."(6.021)라고 말하고 있다. 이 일련의 정의에서 우변 "1",

“2”, “3” 등은 피정의항이고, 좌변 “0 + 1”, “0 + 1 + 1”, “0 + 1 + 1 + 1” 등은 정의항이다. 혹자는 이 지점에서 다음과 같은—일견 사소해 보이는, 하지만 실제로는 매우 심각한—주장을 할 수 있다: “0 + 1 = 1 Def.”라는 정의를 살펴보자. 여기에서 피정의항은 “1”이고 정의항은 “0 + 1”이다. 따라서 피정의항 “1”은 이미 정의항 “0 + 1”에 포함되어 있다. 다시 말해 이 정의는 순환적이다.

그러나 과연 “0 + 1 = 1 Def.”은 순환적 정의인가? 이미 비트겐슈타인은 4.1273에서 프레게와 러셀의 후속자 개념의 정의가 “악순환을 포함”하고 있다고 비판한바 있다. 그러한 비트겐슈타인이 6.02에서 순환적 정의를 제시했다는 것은 과연 이해 가능한가? 나는 프래스콜라와 마찬가지로 그렇지 않다고 생각한다. 왜냐하면 프래스콜라가 지적하는 바와 같이, 여기에서 피정의항 “1”은 산수의 언어에 속하고, 정의항 “0 + 1”은 연산 이론의 언어에 속하기 때문이다.[9] 프래스콜라는 연산 이론의 언어에 속하는 표현을 산수의 언어에 속하는 것과 구분하기 위해 이탤릭체로 표기하고 있는데, 이에 따르면 위의 정의는 다음과 같이 표기된다. “*0* + *1* = 1 Def.”, “*0* + *1* + *1* = 2 Def.”, “*0* + *1* + *1* + *1* = 3 Def.”, 등등. 또는 이를 다음으로 바꿀 수 있다. “*S0* = 1 Def.”, “*SS0* = 2 Def.”, “*SSS0* = 3 Def.”, 등등. 더 나아가 “*3*”과 “3”, 일반적으로 “*n*”과 “n”은 구분되어야 하는데, 전자는 연산 이론의 언어에 속하고, 후자는 산수의 언어에 속한다.

이제 우리는 “수는 연산의 지수이다.”(6.021)가 무엇을 뜻하는지를 분명하게 알 수 있다. 정의 “*0* + *1* = 1”, “*0* + *1* + *1* = 2”, “*0* + *1* + *1* + *1* = 3”, 등등에서 “수”는 1, 2, 3 등등이고, “연산의 지수”는 *0* + *1*, *0* + *1* + *1*, *0* + *1* + *1* + *1* 등등이다. 이제 우리는 이 지점에서 다음 세 가지를 명심해야 한다.

---

9) 이 점을 명시적으로 밝히는 언급이 바로 “수는 연산의 지수이다.”(6.021)이다.

첫째, 비트겐슈타인은 산수의 언어와 연산 이론의 언어를 구분하고 있다. 오직 이렇게 파악할 때, 위의 기수에 대한 정의는 순환적이지 않다고 말할 수 있다. 그럼에도 불구하고 비트겐슈타인은 "0 + 1 = 1 Def."에서와 같이, 연산 이론의 언어에 속하는 것과 산수의 언어에 속하는 것을 동일한 방식으로 표기하고 있다.[10] 그렇기 때문에 연산 이론과 산수가 동시에 논의되는 상황에서는 이 점을 항상 염두에 두어야 한다.

둘째, 연산 이론의 언어에서는 "*1*", "*2*", "*3*" 등등은 위의 방식으로 정의되지 않는다. 왜냐하면 연산 이론에서 가령 "*0 + 1 = 1* Def."과 같은 정의가 허용된다면, 이 정의는 그야말로 순환적이기 때문이다. 오히려 "*1*", "*2*", "*3*" 등등은 "*0 + 1*", "*0 + 1 + 1*", "*0 + 1 + 1 + 1*" 등등에 대한 (또는 "*S0*", "*SS0*", "*SSS0*" 등등에 대한) 축약 표현이다.[11] 사실상 6.02의 귀납적 정의에 의해서는 (앞에

---

10) 바로 이 점 때문에, 앤스컴은 비트겐슈타인이 산수의 언어와 연산 이론의 언어를 구분하고 있다는 점을 파악하지 못하고 있다. 그녀는 (Anscombe (1959), p. 125 각주에서) 비트겐슈타인이 5.2521과 5.2522에 나오는 "O"를 6.02에서 "Ω"로 바꾼 것은 'O^0'이 내키지 않게 불명료(disagreeably unperspicuous)하기 때문이라고 말한다. 물론 이는 옳을 가능성이 크다. 그런데 그녀는 "O"를 "Ω"로 바꾼 것처럼 수 변항 "n" 대신에 "Ω"에 맞추어 그리스 소문자 "ν"를 사용한 것은 "효과가 없다(pointless)"고 주장한다. 그러나 나중에 살펴보겠지만 『원논고』 6.011에는 이미 "$O^{\nu'}x$"와 같은 표현이 등장한다. 비트겐슈타인이 "n"이 아니라 "ν"를 사용한 데에는 중요한 이유가 있다. 즉 그는 이를 통하여 산수의 언어와 연산 이론의 언어가 다르다는 점을 암시하고 있는 것이다.

11) 사실상 나는 이렇게 생각하는데, 6.02의 "ν"에 대한 프래스콜라의 설명은 다소 혼란스럽다. 그는 "연산 이론 언어의 'n'은 '*S*'가 n번 나오는 '*SS*…*S0*'의 축약"(Frascolla (1994), p. 11)이라고 말한다. 반면에 그는 6.241의 증명을 재구성하면서 '*2*'는 *2*의 정의에 의해 '*SS0*'와 같고(p. 15), '*SSSS0*'은 *4*의 정의에 의해 '*4*'와 같다고 간주한다(pp. 16-17). 또한 그는 비트겐슈타인이 수 변항(numerical variables)으로서 "μ"와 "ν"를 사용하는 것은 "전적으로 오도적"(Frascolla (1994), p. 14)이라고 주장하면서, "ν"는 *0 + 1 + 1 +* ⋯ *+ 1*

서 살펴보았듯이) “*0 + 1*”, “*0 + 1 + 1*”, “*0 + 1 + 1 + 1*” 등등과 같은 표현만 산출될 뿐이지, “*1*”, “*2*”, “*3*” 등등의 표현은 산출되지 않는다. 이제 우리는 후자를 전자의 축약으로 파악할 수 있는데, 이를 간단히 (연산의 지수에 대한) “**축약 규칙**”이라고 부르자. 축약 규칙에 따라 가령 “*2*”는 “*0 + 1 + 1*”이며, 역도 성립한다. 특히 “*2*”는 “*0 + 1 + 1*”의 축약 표현이지, “*1 + 1*”의 축약 표현이 아니다.

셋째, 가령 “*0 + 1 + 1*”에서 “+”는 일반적인 덧셈 연산 기호가 아니다. 그렇기 때문에 이를 분명하게 명시하기 위해 우리는 그것을 “*SS0*”로 나타낼 수 있다. “+”는 오직 “*0 + 1 + 1 + 1*” 등과 같은 형식의 표현에서만 등장한다. 반면에 $\Omega^{1\ +\ 1}{}'x$와 $\Omega^{2\ +\ 3}{}'x$에 등장하는 “+”는 연산의 지수들의 덧셈 연산 기호이다. 이를 명시적으로 구분하기 위해서 “**+**”로 표기하자. 마찬가지로 앞의 표현도 $\Omega^{1\ \mathbf{+}\ 1}{}'x$와 $\Omega^{2\ \mathbf{+}\ 3}{}'x$로 표기된다. 또한 “(*0 + 1*) **+** (*0 + 1*)”은 어떤 기수에 대한 정의항이 아니라 합 “*1* **+** *1*”이다.

4.『논고』6.241에 대한 프래스콜라의 해석

이제 6.241에 대한 올바른 재구성을 위한 예비적인 작업으로서 프래스콜라가 제시한 해석을 살펴보기로 하자. 프래스콜라는 6.241에 대해서 그럴듯한 해석을 제시한다. 그는 특히 6.241에서 합성 연산이 사용되고 있다는 것을 밝히고 있는데, 이는 그의 중요한 기여이다. 반면에 나는 이렇게 생각하는데, 그는 몇 가지 중요한 오류를 범하고 있다. 먼저 6.241을 다시 살펴보기로 하자.

형식의 표현에 대한 도식적 문자(schmatic letter)로 간주되어야 한다고 말한다 (Frascolla (1994), p. 6). 이러한 프래스콜라의 주장들은 그가 여전히 앤스컴의 영향에서 벗어나지 못했음을 보여주고 있다고 나는 생각한다.『논고』에서 6.02와 6.241의 “ν”와 “μ”는 연산 지수에 대한 변항이지 수 변항이 아니다.

예컨대 2 × 2 = 4라는 명제의 증명은 다음과 같다 :

$$(\Omega^{\nu})^{\mu'}x = \Omega^{\nu \times \mu'}x \qquad \text{Def.}$$

$$\Omega^{2 \times 2'}x = (\Omega^{2})^{2'}x = (\Omega^{2})^{1+1'}x = \Omega^{2'}\Omega^{2'}x = \Omega^{1+1'}\Omega^{1+1'}x = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1'}x = \Omega^{4'}x. \quad (6.241)$$

이 증명은 한 개의 정의와 여덟 개의 등식들로 이루어져 있다. 프래스콜라는 처음 4개의 등식을 다음과 같이 분석한다.

[1] $\Omega^{(2 \times 2)'}x = (\Omega^{2})^{2'}x$ [“$\Omega^{(r \times s)'}x$”의 정의에 의해]
[2] $= (\Omega^{2})^{SS0'}x$ [“*2*”의 정의에 의해]
[3] $= \Omega^{2'}\Omega^{2'}x$
[“Ω” 자리에 “Ω^{2}”가 있는 6.02의 귀납적 정의에 의해]
[4] $= \Omega^{SS0'}\Omega^{SS0'}x$ [“*2*”의 정의에 의해]
[5] $\Omega^{SS0'}\Omega^{SS0'}x = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$[12]

단계 [1]은 한 가지를 제외하면 옳다.[13] 이제 단계 [2]를 보자. 이는 옳은가? 6.241의 두 번째 등식과 단계 [2]를 비교하면 우리는 뭔가 이상한 것을 보게 된다. 프래스콜라는 ““*2*”의 정의에 의해”라는 해명과 함께 [1]의 “*2*”에 “*SS0*”를 대입시키고 있다. 물론 “*SS0*”은 “*0* + *1* + *1*”이다. 그런데 6.241의 두 번째 등식에서 등장하는

---

12) Frascolla (1994), p. 15.

13) 프래스콜라는 6.241에 제시된 정의, 즉 “$\Omega^{\nu \times \mu'}x$”를 거론하지 않고, 자신의 정의 “$\Omega^{(r \times s)'}x$”를 언급하고 있다. 그는 비트겐슈타인의 “$\nu$”와 “$\mu$”와 같은 “수적 변항의 사용은 전적으로 오도적”(Frascolla (1994), p. 14)이라고 주장한다. 그러나 앞에서 지적한 바와 같이, 그리고 나중에 분명하게 되겠지만, “ν”와 “μ”는 수적 변항이 아니라 연산의 지수에 대한 변항이며, 연산의 지수에 대한 축약이거나 연산의 지수들의 덧셈 결과에 해당된다. 그렇기 때문에 ““$\Omega^{\nu \times \mu'}x$”의 정의에 의해”로 충분하다.

것은 “0 + 1 + 1”이 아니라 “1 + 1”이다! 우리는 이 둘을 구분해야만 한다. 6.02에서 “2”는 전자로 정의되었지 후자로 정의되지 않았다. 또한 프래스콜라는 단계 [2]에서 ““*2*”의 정의에 의해”라고 말하면서 오류를 범하고 있다. “*2*”는 “*SS0*” 또는 “*0 + 1 + 1*”의 축약이지 후자가 전자의 정의항인 것은 아니다.

단계 [3]에 대한 프래스콜라의 해명은 옳다. 6.02에서 $\Omega^{0+1=1'}x$는 $\Omega'\Omega'x$와 같고, 여기에서 Ω는 연산 변항이므로 Ω 자리에 어떤 연산이 대입되든(대입되는 연산이 합성 연산인 경우도 허용된다) 그러한 등식은 성립한다. 이제 단계 [4]를 보자. 과연 프래스콜라가 제시한 단계 [4]는 적절한가? 물론 단계 [4]의 등식은 성립한다. 그러나 6.241의 네 번째 등식을 단계 [4]로 해석하는 것은 결코 6.241의 증명을 해명하지 못한다! 우리는 이 점을 단계 [3]과 단계 [5]를 비교함으로써 알 수 있다. 프래스콜라는 단계 [2]에서 6.02의 귀납적 정의(특히 $\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1=1'}x$)를 사용함으로써 단계 [3]으로 나아갔다. 그리고 이는 옳다. 반면에 그는 단계 [5]에서 6.02의 귀납적 정의를 사용하지 않고 다른 방식으로 나아가고 있다. 다시 말해 프래스콜라가 한 것처럼 단계 [3]에서 [4]로 나아가는 것은 단계 [5]를 해명하는 데 전혀 도움이 되지 않는다.

이제 이 점을 더 상세하게 다루기로 하자. 프래스콜라는 단계 [5]를 제시한 후에 다음과 같이 묻는다: “그러나 “$(\Omega'\Omega)$”는 무엇을 의미하는가?” 곧 이어 그는 다음과 같이 말한다.

> 상징 “Ω”의 역할이 주어져 있을 때, 이 물음에는 오직 한 가지 합당한 대답만 존재한다: “$(\Omega'\Omega)$”는 **주어진 연산이 그것 자신과의 합성으로부터 결과되는 연산의 형식을 보여준다.** 다시 말해 “(주어진) 연산의 두 번째 반복”이라고 통상적으로 알려진 연산의 형식을 보여준다.[14)]

---

14) Ibid., pp. 15-16.

요컨대 프래스콜라에 따르면 “$(\Omega'\Omega)$”은 합성 연산이라는 것이며, 나는 바로 이러한 지적은 프래스콜라의 중요한 기여라고 생각한다. 반면에 우리는 단계 [3]과 단계 [5]에서 이질적인 것을 본다. 왜냐하면 단계 [3]에서는 “*SS0*”와 관련된 것은 6.02의 귀납적 정의를 따라 해명되고 있지만 단계 [5]에서는 “*SS0*”와 관련된 것은 6.02의 귀납적 정의가 아니라 합성 연산과 관련된 것으로 해명되고 있기 때문이다. 요컨대 프래스콜라의 해명은 일관성이 없다. 프래스콜라는 이 점을 애매성의 문제로 돌린다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 6.02에서의 정의에 의해, “$\Omega'\Omega'x$”는 “$\Omega^{2}{'}x$”로 축약될 수 있지만, 6.241에서는 조금의 설명도 없이, 동일성(identity) “2 × 2 = 4”에 대응하는 연산 이론 등식(equation)에 대한 비트겐슈타인의 증명에서, 단계 [3]에 등장하는 “$\Omega^{2}{'}x$”는 단계 [4]에 등장하는 “$\Omega^{SS0}{'}x$”와 마찬가지로 애매하다. 그렇지만, 단계 [4]로부터 단계 [5]로의 이행은 “$\Omega^{SS0}{'}x$”의 유일한 해석—이는 그 증명의 결론을 허용하는데—을 주면서, 이 애매성을 해결한다.15)

프래스콜라는 단계 [5]에 등장하는 “$(\Omega'\Omega)$”가 합성 연산이라는 것을 지적하고 있을 뿐 왜 단계 [5]가 성립하는지는 전혀 해명하지 못하고 있다. 사실상 그는 단계 [5]가 아닌 다른 가능성을 염두에 두고 있다.16)

[5*] $\Omega^{SS0}{'}\Omega^{SS0}{'}x = \Omega^{SS0}{'}\Omega'\Omega'x$

그러나 이렇게 해석하면, 그도 인정하듯이, 증명은 더 이상 진전될 수 없다. 왜냐하면 그에 따르면, 6.02의 귀납적 정의는 $\Omega^{SS0}{'}x$로부

15) Ibid., p. 16.
16) Ibid., p. 16.

터 $\Omega'\Omega'x$를 끌어낼 수 있지만, $\Omega^{SS0}{}'x$에서 x 자리에 $\Omega'\Omega'x$가 나오는 경우(즉 [5*]의 우변)에 대해서는 아무것도 말하지 않기 때문이다. 이 문제를 해결하기 위하여 프래스콜라는 다음의 정의를 도입한다.[17]

[A] $(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi$

정의 [A]는 ξ가 x인 경우에도, 또 ξ가 가령 $\Omega'\Omega'x$인 경우에도 적용된다. 그리하여 프래스콜라에 따르면 6.241의 증명은 다음과 같이 계속된다.

[6]	$(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = (\Omega'\Omega)'\Omega'\Omega'x$	[정의 [A]에 의해]
[7]	$= \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$	[정의 [A]에 의해]
[8]	$= \Omega^{SSSS0}{}'x$	[6.02의 귀납적 정의에 의해]
[9]	$= \Omega^{4}{}'x$	[“*4*”의 정의에 의해][18]

여기에서 우리가 주목해야 하는 것은 프래스콜라의 재구성에서 단계 [2]로부터 단계 [3]으로의 이행은 자연스럽지만, 단계 [5]로부터 단계 [7]로의 이행은 뭔가 부자연스러워 보인다는 것이다. 그는 [5]로부터 [7]로의 이행을 위해 단계 [6]을 거치고 있으며, 이와 함께 자신의 새로운 정의 [A]를 사용하고 있다. 또한 우리는 단계 [8]에서도 뭔가 이상한 것을 발견할 수 있다. 프래스콜라에 따르면, 단계 [7]로부터의 [8]로의 이행은 “6.02의 귀납적 정의에 의해” 옳다. 그러나 문제는 6.241의 일곱 번째 등식에서 등장하는 것은 $\Omega^{SSSS0}{}'x$(즉, $\Omega^{0+1+1+1+1}{}'x$)이 아니라 $\Omega^{1+1+1+1}{}'x$라는 것이다. 마지막으로 단계 [9]에서 프래스콜라가 말해야 했던 것은 ““*4*”의

---

17) Ibid., p. 16.

18) Ibid., pp. 16-17.

정의에 의해"가 아니라 "*4*"가 "*0 + 1 + 1 + 1 + 1*"의 축약 표현이라는 점이었다.[19)]

5. 『원논고』 6.011과 『논고』 6.02

앞에서 우리는 6.241의 증명에 대한 프래스콜라의 해석을 살펴보았다. 먼저 나는 단계 [2]로부터 단계 [3]으로 나아가는 것이 6.02의 귀납적 정의에 의한 것이라는 지적과 단계 [5]에 등장하는 "$(\Omega'\Omega)$"가 합성 연산이라는 지적은 프래스콜라의 중요한 기여라고 생각한다. 반면에 우리는 그의 해석에서 뭔가 석연치 않은 것을 확인하였다. 첫째, 단계 [2]에 등장하는 "*SS0*"에 해당되는 6.241의 표현은 "0 + 1 + 1"이 아니라 "1 + 1"이고, 단계 [8]의 "*SSSS0*"에 해당되는 6.241의 표현은 "0 + 1 + 1 + 1 + 1"이 아니라 "1 + 1 + 1 + 1"이다. 둘째, 프래스콜라는 단계 [5]가 왜 성립하는지를 전혀 해명하지 못하고 있다. 셋째, 프래스콜라는 단계 [3]에 나오는 "$\Omega^{2\prime}x$"와 단계 [4]에 나오는 "$\Omega^{SS0\prime}x$"가 애매하다고 말하면서 이 애매성은 단계 [5]에서 해소된다고 주장하지만, 어떻게 그 애매성이 해소되는지에 대해서는 전혀 해명하지 못하고 있다.[20)] 넷째, 프래

19) 그 다음에 프래스콜라는 자신의 방식으로 "$\Omega^{(r \times s)'}x$"의 정의를 제시한다. 왜냐하면 6.241에 대한 그의 해석에 따르면, "완전한 체계적인 재구성"을 위해서는 덧셈 연산에 대한 정의가 필요한데, 비트겐슈타인은 이를 간과했기 때문이다(Frascolla (1994), p. 18). 그리하여 프래스콜라는 자신의 방식으로 "$\Omega^{(r \times s)'}x$"와 "$\Omega^{(r + s)'}x$"의 정의를 제시한다(pp. 17-18). 그러나 그의 그러한 정의는 하나의 계산 체계로서 성립할 수는 있겠지만, 그도 인정하듯이, "불편한 복잡성"(unpleasant complication)(p. 176, 각주 31)을 지니고 있으며, 나중에 밝혀지겠지만 6.241에 부합하지 않는다.

20) 사실상, 나중에 살펴보겠지만, 그러한 애매성은 해소될 수 없다. 왜냐하면 두 번째 등식에서의 "1 + 1"과 네 번째 등식에서의 "1 + 1"은 그 의미가 완전히 상이하기 때문이다.

스콜라는 단계 [5]로부터 단계 [7]로 나아가기 위해서 자신의 정의 [A]를 요청하고 있는데, 이는 뭔가 미봉책인 것 같다는 인상을 준다.

그렇다면 프래스콜라가 그러한 오류들을 범하게 된 까닭은 무엇일까? 나는 크게 두 가지가 있다고 생각한다. 첫째, 프래스콜라는 비트겐슈타인이 6.241에서 곱셈 연산을 정의하면서 덧셈 연산을 간과했다고 주장한다.[21] 그리하여 6.241에 대한 프래스콜라의 재구성에서는 덧셈 연산이 등장하지 않고 오직 "*SS*⋯*S0*" 형식의 표현만 등장하고 있다. 그러나 과연 6.241에서 비트겐슈타인이 덧셈 연산을 간과했는가? 나는 그렇지 않다고 생각한다. 둘째, 프래스콜라의 재구성에서 "*SS*⋯*S0*" 형식의 표현만 등장하고, 그리하여 비트겐슈타인이 덧셈 연산을 간과했다고 주장하게 된 것은 일차적으로는 비트겐슈타인의 실수로부터 연유한 것이다. 비트겐슈타인이 두 번째 등식에서 써야 했던 것은 $(\Omega^2)^{1+1'}x$가 아니라 $(\Omega^2)^{0+1+1'}x$이다. 마찬가지로 그가 일곱 번째 등식에서 써야 했던 것은 $\Omega^{1+1+1+1'}x$가 아니라 $\Omega^{0+1+1+1+1'}x$이다.

말하자면 비트겐슈타인은 6.02의 정의에 따라 6.241의 두 번째 등식과 일곱 번째 등식에서 "0 + 1 + 1"과 "0 + 1 + 1 + 1 + 1"이라고 써야 할 자리에 "1 + 1"과 "1 + 1 + 1 + 1"을 쓴 것이다. 그렇다면 왜 그는 이러한 실수를 하게 된 것일까? 나는 이 수수께끼를 해결해 줄 결정적인 실마리는『원논고』(*Prototractatus*) 6.011에 있다고 생각한다. 다시 말해 나는『논고』 6.02에 해당하는『원논고』 6.011을 면밀히 살펴보면, 왜 비트겐슈타인이『원논고』를 토대로『논고』를 완성하는 과정에서 실수를 했는지 그 배경을 이해할 수 있다고 생각한다.『원논고』 6.011은 다음과 같다.

---

21) Frascolla (1994), p. 18.

6.011 나는 이제 다음과 같이 정의한다:

$$x = O^{0'}x \quad \text{Def.}$$

그리고 $| x, \xi, O'\xi | = | O^{0'}x, O^{\nu'}\xi, O^{\nu+1'}\xi |$

그리고 $0 + 1 = 1$ Def.

그리하여 나는 “x, $O'x$, $O'O'x$, $O'O'O'x$, 등등” 대신에 “$O^{0'}x$, $O^{1'}x$, $O^{1+1'}x$, $O^{1+1+1'}x$, 등등”이라고 쓴다.

$$1 + 1 = 2 \quad \text{Def.}$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{Def.}$$ 등등[22)]

여기에서 주목해야 하는 것은 『원논고』 6.011에서 1은 “0 + 1”로 정의되었지만 2와 3은 각각 “0 + 1 + 1”과 “0 + 1 + 1 + 1”로 정의되지 않고 (『논고』 6.02와 다르게) “1 + 1”과 “1 + 1 + 1”로 정의되었다는 점이다. 『논고』를 완성하는 과정에서 6.241이 첨가되었고(『원논고』에는 『논고』의 6.241에 해당되는 내용이 없다), 이와 동시에 『원논고』 6.011은 『논고』 6.02로 수정되었는데, 비트겐슈타인은 6.02에서 바뀐 정의를 6.241에서 일관성 있게 수정하지 않았던 것이다.

그렇다면 왜 비트겐슈타인은 『원논고』 6.011을 『논고』 6.02로 수정하였는가? 나는 이 문제는 대단히 중요하다고 생각한다. 왜냐하면 바로 이 문제에 대해서 숙고하게 되면 우리는 『논고』 6.241에는 덧셈 연산이 전제되어 있을 수밖에 없다는 결론에 도달하게 될 것이기 때문이다. 『원논고』 6.011과 『논고』 6.02의 결정적 차이는 “2”, “3” 등의 정의에 있다(“1”의 정의는 동일하다). 그렇다면 가령 “2”를 “1 + 1”로 정의하면 무엇이 문제가 되는가?

그 대답은 다음과 같다. 만일 “2”를 “1 + 1”로 정의하면, **피정의항**으로서의 “2”와 합, 즉 **덧셈의 결과**로서의 “2”를 구분할 수 없다. 『논고』 6.02에서 “2”는 “*0 + 1 + 1*”(즉 “*SS0*”)로 정의되어 있다.

---

22) Wittgenstein (1971), p. 200.

그러나 "2"를 "1 + 1"로 정의하게 되면, 이는 "(*0* + *1*) + (*0* + *1*)"로 정의한 것일 수밖에 없는데, 그렇게 되면 "2"는 "1 + 1"이라는 덧셈의 결과가 되며, 비트겐슈타인이 의도하는 정의항 "*0* + *1* + *1*"이 정의하는 피정의항 "2"가 되지 않는 것이다. 그리고 실제로『원논고』6.011는 오류이다. 즉 "0 + 1 + 1"과 "(0 + 1) + (0 + 1)"은 상이하다.『원논고』6.011의 귀납적 정의에 따라 우리가 "x, $O'x$, $O'O'x$, $O'O'O'x$, 등등" 대신에 쓸 수 있는 것은 "$O^{0'}x$, $O^{1'}x$, $O^{1+1'}x$, $O^{1+1+1'}x$, 등등"이 아니라 "$O^{0'}x$, $O^{0+1'}x$, $O^{0+1+1'}x$, $O^{0+1+1+1'}x$, 등등"이다.

그렇기 때문에 비트겐슈타인이『원논고』6.011을『논고』6.02로 수정하였다는 것은 피정의항 "2"와 덧셈 결과로서의 "2"를 명확하게 구분하였다는 것을 뜻한다. 이는 바꿔 말하면 그가 연산 이론에서의 덧셈 연산을 염두에 두고 있다는 것을 뜻하며, 이러한 상황에서『논고』6.241이 새롭게 추가된 것이다. 6.241은 이미 확인했듯이 "2 × 2 = 4"의 증명을 제시하고 있다. 우리는 일반적으로 덧셈을 통하여 곱셈을 설명한다. 가령 3에 5를 곱하는 것은 3을 다섯 번 더하는 것이다. 이러한 덧셈 없이 곱셈을 설명하는 것은 가능한가? (6.02의 귀납적 정의를 고수하는 한) 그것은 불가능하거나, 만일 가능하다면 대단히 복잡할 것이다. 반면에 6.241에서의 증명은 전혀 복잡하지 않다. 그렇다면 6.241에는 덧셈 연산이 포함되어 있을 가능성이 크다. 실제로 그러하다는 것을 다음 절에서 확인하기로 하자.

6. 합성 연산과 덧셈 연산

앞에서 우리는 비트겐슈타인이 산수의 언어와 연산 이론의 언어를 구분하였다는 것을 확인하였다. 또한 우리는『논고』6.241에서

비트겐슈타인이 오자를 수정하지 않았다는 것을 확인하였다. 따라서 나는 이제 이 두 가지를 감안하여 6.241을 수정하여 제시하고자 한다.

$$(\Omega^{\nu})^{\mu\prime}x = \Omega^{\nu \times \mu\prime}x \quad \text{Def.}$$

$$\Omega^{2 \times 2\prime}x = (\Omega^{2})^{2\prime}x = (\Omega^{2})^{0+1+1\prime}x = \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x = \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x$$
$$= (\Omega\prime\Omega)\prime(\Omega\prime\Omega)\prime x = \Omega\prime\Omega\prime\Omega\prime\Omega\prime x = \Omega^{0+1+1+1+1\prime}x = \Omega^{4\prime}x.$$

두 번째 등식에서 "1 + 1"은 "*0 + 1 + 1*"로 (즉 "*SS0*"로) 수정되었고, 일곱 번째 등식에서 "1 + 1 + 1 + 1"은 "*0 + 1 + 1 + 1 + 1*"로 (즉 "*SSSS0*"로) 수정되었다. 또한 네 번째 등식에서 등장하는 표현은 "*1 + 1*"이 아니라 "*1* + *1*"임을 주목하자.

프래스콜라의 해석과 나의 해석에서 중요한 차이는 프래스콜라의 단계 [4]와 위의 네 번째 등식에 있다. 즉 프래스콜라가 단계 [4]에서 "*SS0*"이라고 표기한 것을 나는 "*1* + *1*"로 쓰고 있는데, 왜냐하면 네 번째 등식은 "*2*"의 축약이나 정의에 의해서 성립하는 것이 아니라, 나중에 살펴보겠지만, 연산의 지수의 덧셈 연산에 의해서 (즉 "*2 = 1* + *1*"에 의해서) 성립하는 것이기 때문이다. 그리고 바로 이 점을 확인하게 되면 우리는 6.241에는 덧셈 연산이 어떻게 정의해야 하는지가 이미 충분히 암시되어 있다는 것을 알 수 있다.

그러면 이제 6.241의 증명이 덧셈 연산의 정의를 이미 암묵적으로 다루고 있다는 것을 확인하기로 하자. 이는 다섯 번째 등식에서 등장한다.

$$\Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x = (\Omega\prime\Omega)\prime(\Omega\prime\Omega)\prime x$$

여기에서 "$(\Omega\prime\Omega)$"은 프래스콜라가 지적했듯이 합성 연산이다. 이제 합성 연산을 쉽게 이해하기 위해서 "-의 아버지"를 형식적 개념

이라고 (그러니까 어떤 형식 계열에서 "-의 직전자"에 해당하는 개념이라고) 간주하기로 하자. 그러면 우리는 다음과 같은 형식 계열을 생각할 수 있다.

철수, 철수의 아버지, 철수의 아버지의 아버지, 철수의 아버지의 아버지의 아버지, ……

이 형식 계열의 일반항은 [철수, ξ, 아버지'ξ]이다. 그러면 합성 연산을 이해하기 위해서, 그리고 이와 함께 합성 연산들에 대한 변형 규칙과 또 덧셈 연산을 어떻게 정의하는 것이 자연스러운지를 살펴보기 위해, 가장 쉬운 예를 생각해 보자.

철수의 아버지의 아버지	$\Omega'\Omega'x$	$\Omega^{0+1+1}{}'x$	$\Omega^{2}{}'x$
철수의 (아버지의 아버지)	$(\Omega'\Omega)'x$	$\Omega^{1+1}{}'x$	$\Omega^{2}{}'x$

위에서 확인할 수 있듯이, "철수의 아버지의 아버지"(즉, 아버지'아버지'철수)의 형식은 "$\Omega'\Omega'x$"이며, "철수의 (아버지의 아버지)"(즉, (아버지'아버지)'철수)의 형식은 "$(\Omega'\Omega)'x$"이다. "$\Omega'\Omega'x$"는 6.02의 귀납적 정의에 의해 $\Omega^{0+1+1}{}'x$와 동일하며, 축약 규칙에 의해 $\Omega^{2}{}'x$와 같다. "$(\Omega'\Omega)'x$"는 합성 연산(의 형식)이며, 이는 6.241의 다섯 번째 등식에 따라 $\Omega^{1+1}{}'x$와 같고, 네 번째 등식에 따라 $\Omega^{2}{}'x$와 같다. 여기에서 $\Omega^{2}{}'x$가 $\Omega^{1+1}{}'x$와 같은 이유는 나중에 살펴보겠지만, "$2 = 1 + 1$"가 성립하기 때문이다. 마지막으로, 철수의 아버지의 아버지는 철수의 (아버지의 아버지)와 같다. 즉, 둘 다 철수의 할아버지이다.

정리하면 다음과 같다.

$$\Omega^{1+1}{}'x = (\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1}{}'x = \Omega^{2}{}'x$$

이로부터 우리는 $\Omega^{1+1}{}'x$와 같은 덧셈 연산은 $(\Omega'\Omega)'x$와 같은 합성 연산으로 정의할 수 있다는 것을 알 수 있고, 또 위의 두 번째 등식으로부터 우리에게 필요한 변형 규칙은 $(\Omega'\Omega)'$를 $\Omega'\Omega'$으로 바꾸게 하는 규칙이라는 것을 알 수 있다. 이제 이러한 실마리를 더 구체화하기 위해 다음을 살펴보자.

철수의 아버지의 아버지의 아버지	$\Omega'\Omega'\Omega'x$	$\Omega^{0+1+1+1}{}'x$	$\Omega^{3}{}'x$
철수의 (아버지의 아버지)의 아버지	$\Omega'(\Omega'\Omega)'x$	$\Omega'\Omega^{1+1}{}'x$	
철수의 아버지의 (아버지의 아버지)	$(\Omega'\Omega)'\Omega'x$	$\Omega^{1+1}{}'\Omega'x$	
철수의 (아버지의 아버지의 아버지)	$(\Omega'\Omega'\Omega)'x$	$\Omega^{1+1+1}{}'x$	$\Omega^{3}{}'x$
철수의 ((아버지의 아버지)의 아버지)	$(\Omega'(\Omega'\Omega))'x$	$\Omega^{1+(1+1)}{}'x$	$\Omega^{1+2}{}'x$
철수의 (아버지의 (아버지의 아버지))	$((\Omega'\Omega)'\Omega)'x$	$\Omega^{(1+1)+1}{}'x$	$\Omega^{2+1}{}'x$

앞에서와 같이, 이 표현들이 가리키는 것은 모두 같다. 즉 철수의 증조할아버지이다. 또한 우리는 $(\Omega'\Omega'\Omega)'x$, $(\Omega'(\Omega'\Omega))'x$, $((\Omega'\Omega)'\Omega)'x$ 형식의 합성 연산은 모두 덧셈 연산이라는 것을 알 수 있다. $\Omega'(\Omega'\Omega)'x$는 덧셈 연산의 표현이 아니다. 그것은 x에 합성 연산 $\Omega'\Omega$를 적용한 결과에 다시 연산 Ω를 순차적으로 적용한 결과이다. $(\Omega'\Omega)'\Omega'x$도 마찬가지로 덧셈 연산의 표현이 아니다. 또한 $\Omega'\Omega'\Omega'x$는 x에 연산 Ω를 3번 계속 적용한 결과이며, 덧셈 연산의 표현이 아니다.[23)]

지금까지의 고찰로부터 우리는 합성 함수를 다루는 변형 규칙과

---

23) 프래스콜라는 “2 + 3”에 해당되는 것은 “$((\Omega'\Omega)'(\Omega'(\Omega'\Omega)))'x$”라고 말한다(Frascolla (1994), p. 13). 그러나 우리의 기호법에서 그것에 해당되는 것은 “(1 + 1) + (1 + (1 + 1))”이다. 또한 우리의 기호법에서 “2 + 3”에 해당되는 것은 “$(\Omega^{2}{}'\Omega^{3})'x$”이다. 이것은 “$(\Omega^{1+1}{}'\Omega^{1+1+1})'x$”로 변형되고 다시 “$((\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega))'x$”로 변형된다.

덧셈 연산의 정의를 규명할 수 있다. 먼저 우리에게는 다음의 변형 규칙이 필요하다.

$$[\mathrm{Tr}] \qquad (\Phi' \cdots \Psi' \Omega)' = \Phi' \cdots \Psi' \Omega'$$

여기에서 Φ, Ψ, Ω는 모두 연산 변항이다. 물론 그것들은 모두 합성 연산일 수도 있다. 변형 규칙 [Tr]에 따르면, 특히 다음이 성립한다.

$$(\Omega' \Omega' \cdots \Omega' \Omega)' \xi = \Omega' \Omega' \cdots \Omega' \Omega' \xi$$

여기에서 ξ는 연산의 토대, 가령 x일 수도 있고, 토대에 대해 연산이 계속적으로, 또는 순차적으로 적용한 결과, 가령 $\Omega' \Omega' x$나 $(\Omega' \Omega)' \Omega' x$일 수도 있다. 그리하여 [Tr]에 따르면, $(\Omega' \Omega)' x$는 $\Omega' \Omega' x$와 같고, $(\Omega' \Omega' \Omega' \Omega)' x$는 $\Omega' \Omega' \Omega' \Omega' x$로 바꿀 수 있으며, 가령 $(\Omega' \Omega)' \Omega' x$도 $\Omega' \Omega' \Omega' x$로 변형된다.

이제 우리는 [Tr]을 토대로 6.241에서 비트겐슈타인이 의도하는 연산 지수의 덧셈 연산을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$[+] \qquad \Omega^{\nu + \mu\prime} \xi = (\Omega^{\nu\prime} \Omega^{\mu})' \xi$$

여기에서 ξ에는 x나 x에 연산이 적용된 결과, 가령 $\Omega' x$ 등이 대입될 수 있다. 이제 정의 [+], 변형 규칙 [Tr] 그리고 축약 규칙에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Omega^{1 + 1\prime} x &= (\Omega' \Omega)' x && \text{(정의 [+])} \\ &= \Omega' \Omega' x && \text{(변형 규칙 [Tr])} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Omega^{0+1+1}{}'x && \text{(6.02의 귀납적 정의))} \\
&= \Omega^{2}{}'x && \text{(축약 규칙)}
\end{aligned}
$$

이것은 산수의 "1 + 1 = 2"에 대한 증명이다. 또한 우리는 위의 연산 이론에서의 증명으로부터 연산 이론에서는 "*1 + 1 = 2*"가 성립한다는 것을 알 수 있다.[24] 마찬가지로 다음은 각각 산수의 "2 + 1 = 3", "1 + 2 = 3"에 대한 증명이며, 이로부터 연산 이론에서는 "*2 + 1 = 3*", "*1 + 2 = 3*"이 성립한다는 것을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\Omega^{2+1}{}'x &= (\Omega^{2}{}'\Omega)'x && \text{(정의 [+])} \\
&= \Omega^{2}{}'\Omega'x && \text{(변형 규칙 [Tr])} \\
&= \Omega^{1+1}{}'\Omega'x && (2 = 1 + 1) \\
&= (\Omega'\Omega)'\Omega'x && \text{(정의 [+])} \\
&= \Omega'\Omega'\Omega'x && \text{(변형 규칙 [Tr])} \\
&= \Omega^{0+1+1+1}{}'x && \text{(6.02의 귀납적 정의)} \\
&= \Omega^{3}{}'x && \text{(축약 규칙)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^{1+2}{}'x &= (\Omega'\Omega^{2})'x && \text{(정의 [+])} \\
&= \Omega'\Omega^{2}{}'x && \text{(변형 규칙 [Tr])} \\
&= \Omega'\Omega^{1+1}{}'x && (2 = 1 + 1) \\
&= \Omega'(\Omega'\Omega)'x && \text{(정의 [+])} \\
&= \Omega'\Omega'\Omega'x && \text{(변형 규칙 [Tr])} \\
&= \Omega^{0+1+1+1}{}'x && \text{(6.02의 귀납적 정의)} \\
&= \Omega^{3}{}'x && \text{(축약 규칙)}
\end{aligned}
$$

이러한 방식으로 변형 규칙 [Tr]과 정의 [+], 그리고 축약 규칙은

---

24) 다시 말해 연산 이론에서 "*1 + 1*"는 "*2*"와 서로 대체될 수 있다. 참고: 4.241.

연산의 지수의 덧셈을 모두 계산하게끔 한다. 이를 직관적으로 이해하기 쉽게 설명하면 이렇다: 가령 철수의 (증조할아버지의 고조할아버지)는 철수의 (고조할아버지의 증조할아버지)와 같고, 철수의 7대 조상 할아버지이다. 전자는 $(\Omega^{4\prime}\Omega^{3})'x$의 형식으로 되어 있고, 후자는 $(\Omega^{3\prime}\Omega^{4})'x$의 형식으로 되어 있다. 그리고 다음이 성립한다.

$$(\Omega^{4\prime}\Omega^{3})'x \;=\; (\Omega^{3\prime}\Omega^{4})'x \;=\; \Omega^{7\prime}x$$

이로부터 (『논고』에 따르면) 다음이 증명된다:

$$4 + 3 = 3 + 4 = 7.$$

7.『논고』6.241에서의 증명

앞에서 우리는『논고』에서 산수의 덧셈은 연산 이론에서는 합성 연산으로 해명되고 있다는 것을 살펴보았다. 그렇다면『논고』에서 산수의 곱셈은 어떻게 다루어지고 있는가? 대답은 간단하다. 즉 (1보다 큰) 두 기수의 곱셈은 연산 이론에서는 합성 연산의 계속적 적용으로 다루어진다.[25] 가령 “2 × 2”는 “할아버지”에 대응하는 합성 연산을 두 번 계속 적용하는 것에 해당되고, “2 × 3”은 “할아버지”에 대응하는 합성 연산을 세 번 계속 적용한 것에 해당되며, “3 × 5”는 “증조할아버지”에 대응하는 합성 연산을 다섯 번 계속 적용한 것에 해당된다.

따라서 이제 우리는 연산 이론의 기본적인 착상을 모두 이해했으므로 6.241의 증명을 재구성할 수 있는 지점에 이르렀다.

---

25) 프래스콜라 또한 이 점을 지적하고 있다. 참고: Frascolla (1994), pp. 13-14.

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ \Omega^{2\times 2\prime}x & = (\Omega^{2})^{2\prime}x & (\text{정의 “}\Omega^{\nu\times\mu\prime}x\text{”}) \\
(2) & = (\Omega^{2})^{0+1+1\prime}x & (\text{축약 규칙}) \\
(3) & = \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x & \\
 & ((\Omega\ \text{자리에}\ \Omega^{2}\text{가 대입된) 6.02의 귀납적 정의}) & \\
(4) & = \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x & (2=1+1) \\
(5) & = (\Omega'\Omega)'\Omega^{1+1\prime}x & (\text{정의 [+]}) \\
(6) & = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x & (\text{정의 [+]}) \\
(7) & = (\Omega'\Omega)'\Omega'\Omega'x & (\text{변형 규칙 [Tr]}) \\
(8) & = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x & (\text{변형 규칙 [Tr]}) \\
(9) & = \Omega^{0+1+1+1+1\prime}x & (\text{6.02의 귀납적 정의}) \\
(10) & = \Omega^{4\prime}x. & (\text{축약 규칙})
\end{array}
$$

여기에서 (3)을 주목하면, 우리는 이로부터 비트겐슈타인이 연산 이론에서의 지수의 곱셈을 어떻게 이해하고 있는지 충분히 알 수 있다. (3)에서 $\Omega^{2\times 2\prime}x$는 합성 연산 Ω^{2}를 x에 두 번 계속적으로 적용한 결과와 같다. 마찬가지로 $\Omega^{3\times 5\prime}x$는 합성 연산 Ω^{3}을 x에 다섯 번 계속 적용한 결과와 같다. 여기에서 “*3*”과 “*5*”의 역할은 다르다. 즉 증명의 과정에서 “*5*”는 “$0+1+1+1+1+1$”로 바뀔 것이고(전자는 후자의 축약이다), “*3*”은 “$1+1+1$”로 바뀔 것이다(전자는 후자의 덧셈 결과이다). 마찬가지로 “$\Omega^{\nu\times\mu\prime}x$”에서 ($\nu$와 μ가 각각 지수일 때) “μ”는 증명의 과정에서 어떤 기수의 정의항에 대한 축약의 역할을 하며, “ν”는 덧셈 결과의 역할을 한다.

6.241에 대한 정확한 해명이 이루어지면, 우리는 비로소 『논고』의 수학 철학에 대해 문제 삼을 수 있다. 프래스콜라와 매리언에 따르면, 비트겐슈타인은 『논고』에서 수학 또는 산수를 연산 이론으로 환원하였다.[26] 우리는 이러한 주장에 동의할 수도 있을 것이다.

---

26) 참고: Frascolla (1994), p. 6, p. 12, Marion (1998), p. 26, pp. 28-29.

그러나 여기에서 문제는 이러하다. 그러니까 그것은 어떤 의미에서의 환원인가? 가령 비트겐슈타인은 프레게와 러셀이 수학을 논리학으로 환원하려고 했던 것처럼 수학을 연산 이론으로 환원하고자 했는가? 그러니까 프레게와 러셀이 논리학으로부터 수학이 도출된다고 보았던 것처럼 비트겐슈타인은 연산 이론으로부터 수학이 도출된다고 간주했는가? 다시 말해 비트겐슈타인은 연산 이론이 산수나 수학보다 더 근원적인 것이라고 보았는가? 이 문제는 참으로 중요하다. 나는 이 문제를 다른 논문에서 다루고자 한다.

참고문헌

박정일 (2017), “전기 비트겐슈타인과 러셀의 역설”, 『논리연구』, 제20집 제2호, pp. 163-196.

비트겐슈타인 (2006), 이영철 옮김, 『논리-철학 논고』, 책세상.

Anscombe, G. E. M. (1959), *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, Hutchinson University Library, London.

Black, M. (1964), *A Companion to Wittgenstein's ‘Tractatus’*, Cornell University Press, Ithaca, New York.

Frascolla, P. (1994), *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*, Routledge, New York.

Marion, M. (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford Philosophical Monocraphs.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910), *Principia Mathematica*, Volume 1, Merchant Books.

Wittgenstein, L. (1971), *Prototactatus, London*: Routledge & Kegan Paul LTD.

Wittgenstein, L. (1922), *Tactatus Logico-Philosophicus*, Translated by C. K. Ogden, London, Boson and Henley: Routledge & Kegan Paul LTD.

숙명여자대학교 기초교양대학, 교양교육연구소
Sookmyung Women’s University, College of General Education
willsam@sookmyung.ac.kr

On the Operation Theory of the Tractatus

Jeong-il Park

The operation theory of the Wittgenstein's *Tractatus Logico-Philosophicus* is the essential basis of the philosophy of mathematics of the *Tractatus*. Wittgenstein presents the definition of cardinal numbers on the basis of operation theory, and suggests the proof of "2 × 2 = 4" by using the theory of operations in 6.241. Therefore, in order to explicate correctly the philosophy of mathematics, it is required to understand rigorously the theory of operations in the *Tractatus*. Accordingly in this paper, I will endeavor to explicate operation theory of the *Tractatus* as a preliminary study for explicating the philosophy of mathematics of the *Tractatus*. In this process, we can ascertain Frascolla's important contributions and fallacies in his reconstruction of 6.241. In particular, we can understand the background that in 6.241 Wittgenstein made mistakes and that there he dealt with the addition operation of the theory of operations, and on the basis of this, we can reconstruct correctly 6.241.

Key Words: Wittgenstein, *Tractatus*, Operation Theory, Frascolla, 6.02, 6.241