논리연구 20-1(2017) pp. 69-96

비트겐슈타인과 환원 가능성 공리

박 정 일

【국문요약】 비트겐슈타인은 『논리-철학 논고』에서 러셀의 유형 이론과 특히, 환원 가능성 공리를 명시적으로 비판한다. 그렇다면 러셀의 유형 이론에 대한 비트겐슈타인의 비판의 요점이란 무엇인가? 나는 이 물음에 대답하기 위한 예비적인 작업으로서, 비트겐슈타인이 러셀의 환원 가능성 공리를 어떻게 비판했는지를 살펴보려고 한다. 비트겐슈타인은 러셀의 환원 가능성 공리가 논리적 명제가 아니고, 그것이 참이라면 그저 "오직 운 좋은 우연에 의해서만" 참일 수 있으며, "환원 가능성 공리가 적용되지 않는 세계가 생각될 수 있다"고 선언한다. 그렇다면 그 근거는 무엇인가? 나는 1913년 노르웨이 편지에서의 비트겐슈타인의 생각을 해명함으로써, 그러한 생각이 환원 가능성 공리가 성립하지 않는다는 것을 보여주는 램지와 바이스만의 모델에 결정적인 영향을 주었다는 것을 보이고자 한다.

【주요어】 비트겐슈타인, 『논리-철학 논고』, 환원 가능성 공리, 러셀, 램지, 바이스만

투고일: 2017. 1. 19 심사 및 수정 완료일: 2017. 2. 14 게재확정일: 2017. 2. 15

1. 들어가는 말

잘 알려져 있듯이, 비트겐슈타인은 『논리-철학 논고』(이하, ‘『논고』’로 약칭함)에서 러셀의 유형 이론(theory of types)과 특히, 환원 가능성 공리(axiom of reducibility)를 명시적으로 비판한다. 그렇다면 러셀의 유형 이론에 대한 비트겐슈타인의 비판의 요점이란 무엇인가? 나는 이를 해명하는 일은 결코 쉽지 않다고 생각한다. 그리하여 나는 이 물음에 대답하기 위한 예비적인 작업으로서, 비트겐슈타인이 러셀의 환원 가능성 공리를 어떻게 비판했는지를 살펴보려고 한다. 『논고』에서 비트겐슈타인은 환원 가능성 공리에 대해서 다음과 같이 말한다.

> 논리적인 일반적 타당성은 가령 “모든 사람은 죽는다”라는 명제의 우연적인 일반적 타당성과는 대조적으로, 본질적이라고 불릴 수 있을 것이다. 러셀의 “환원 가능성 공리”와 같은 명제들은 논리적 명제들이 아니다. 그리고 이는 다음과 같은 우리의 느낌을 설명해 준다: 그 명제들이 참이라고 하더라도, 그것들은 오직 운 좋은 우연에 의해서만 참일 수 있을 것이다. (6.1232)
>
> 환원 가능성 공리가 적용되지 않는 세계가 생각될 수 있다. 그러나 논리학이 우리의 세계가 실제로 그러한가 또는 그렇지 않은가 하는 물음과 아무 관계도 없다는 것은 분명하다. (6.1233)[1]

이제 우리의 물음은 다음과 같다. 비트겐슈타인은 러셀의 환원 가능성 공리가 논리적 명제가 아니라고 말하고 있다. 더 나아가 그는 그것이 만일 참이라면 그저 “오직 운 좋은 우연에 의해서만” 참일 수 있으며, “환원 가능성 공리가 적용되지 않는 세계가 생각될 수 있다”고 선언하고 있다. 자, 그렇다면 그 근거는 무엇인가?

그런데 그러한 근거들에 대해 비트겐슈타인은 『논고』에서 전혀

---

1) 비트겐슈타인(2006), p. 101.

명시적으로 해명하고 있지 않다. 반면에, 나중에 살펴보겠지만, 그는 1913년 노르웨이에서 러셀에게 보낸 편지에서 어떻게 환원 가능성 공리가 성립하지 않는 모델을 구성할 수 있는지를 간략하게 설명하고 있다. 한편 우리는 램지(F. P. Ramsey)와 바이스만(F. Waismann)이 각각 환원 가능성 공리가 성립하지 않는 모델을 제시했고, 특히 후자는 보다 더 명시적으로 이 모델에서 환원 가능성 공리가 성립하지 않음을 보이는 증명을 제시했다는 것을 확인할 수 있다. 그렇다면 환원 가능성 공리에 대한 비트겐슈타인, 램지 그리고 바이스만의 모델과 생각은 서로 어떤 관련이 있는가? 나는 이 글에서 램지와 바이스만의 증명은 어떤 점에서는 본질적으로 유사하며, 그것들은 모두 비트겐슈타인의 착상으로부터 유래한 것임을 보이고자 한다.

2. 러셀의 유형 이론

러셀은 『나의 철학적 발전』(*My Philosophical Development*)(1959)에서 1901년 봄에 이른바 러셀의 역설, 즉 자기 자신의 원소가 아닌 집합들의 집합으로부터 발생하는 모순을 발견하였다고 말하고 있다. 러셀은 이 사실을 서신으로 프레게에게 알렸고 프레게는 한없는 절망에 빠지게 된다. 러셀 자신은 『수학의 원리들』(*The Principles of Mathematics*)(1903)을 집필하는 과정에서 러셀의 역설을 발견하였는데, 그는 그 저작의 마지막 부록(Appendix B)에서 역설에 대한 해결책으로서 유형 이론(the doctrine of types)을 제시한다. 여기에서 제시된 착상은 보통 단순 유형 이론(simple theory of types)이라고 불린다. 러셀은 다음과 같이 말한다.

> 모든 명제 함수 φ(x)는 (⋯) 참의 범위 외에 유의미성의 범위(a range of significance), 즉 φ(x)가 참이든 거짓이든 명제가 되기

> 위해 x가 속해야만 하는 한 범위를 갖는다. 이것이 유형들의 이론(the theory of types)의 첫 번째 요점이다. 두 번째 요점은 유의미성의 범위들이 **유형들**(types)을 형성한다는 것이다. 즉 만일 x가 ϕ(x)의 유의미성의 범위에 속한다면, ϕ가 어떻게 변하든, ϕ(x)의 유의미성의 범위에 속해야 하는 대상들의 집합, 즉 x의 **유형**이 존재하며, 그 유의미성의 범위는 항상 단일한 유형이거나 여러 전체 유형들의 합이다.[2)]

이 인용문에서 러셀은 ‘유형’을 정의하고 있다. 그에 따르면, 한 명제 함수가 명제가 되기 위한, 다시 말해 그 명제 함수에 포함된 변항에 상항을 대입시킬 때 명제가 되는 그러한 상항들의 범위, 간단히 유의미성의 범위들이 유형들을 형성한다. 그는 먼저 ϕ(x)에서 ϕ가 고정되었을 때, ϕ(x)에 논항을 대입했을 때 명제가 되는 x의 범위들을 문제 삼고 있으며, 그 다음에는 ϕ가 변화할 때에도 변항에 상항을 대입할 때 명제가 되게끔 하는 유의미성의 범위들을 문제 삼고 있다.[3)]

그리하여 러셀은 **항**(term) 또는 **개별자**(individual)를 “가장 낮은 대상의 유형”(the lowest type of object)이라고 말하며, 그 다음 높은 유형은 “개체들의 범위들 또는 집합들”이고, 그 다음 높은 유형은 “개체들의 집합들의 집합들”이며, 계속 이와 같이 유형들이 형성된다고 말한다. 뿐만 아니라 그는 2항 관계와 3항 관계 등등에 대해서도 유형을 정의할 수 있다고 말한다.

이러한 유형 이론은 러셀의 역설을 해결하는 데 실마리를 제공할 수 있다. 즉 단순 유형 이론에 따르면, “$x \in y$”가 의미 있기 위해서는 y가 x보다 유형이 하나 더 높아야만 한다. 그리하여 가령 “$x \in x$”와 “$x \notin x$”는 무의미하다. 그런데 러셀의 역설은 집합 $S = \{x \mid x \notin x\}$로부터 발생하므로, “$x \notin x$”가 무의미하다면 그러

---

2) Russell(1992), p. 523. 참고: 정인교(1999), p. 196.

3) 러셀 자신도 고백하고 있듯이, “두 번째 요점은 첫 번째보다 덜 정확하고, 수들의 경우에는 난점들을 도입한다.” Russell(1992), p. 523.

한 집합 S는 애초에 존재하지 않는다. 그리하여 모순은 제거된다.

그러나 단순 유형 이론은 일종의 임시방편으로 제시된 것이었으며, 러셀 자신도 역설의 문제에 대한 해결책으로서는 불충분하다는 것을 잘 알고 있었다.[4] 첫째, 단순 유형 이론에서는 집합과 명제함수 간의 관계가 분명치 않다. 특히 집합의 개념에 대해 어떻게 접근해야 할 것인지에 대해 당시 러셀은 분명한 생각을 갖고 있지 않았다.[5] 둘째, 단순 유형 이론은 러셀의 역설에 대해서는 그 해결의 실마리는 제공해줄 수 있지만, 거짓말쟁이 역설, 리샤르의 역설 그리고 그렐링의 역설 등과 같은 다른 여러 역설들에 대해서는 전혀 그러한 실마리를 주지 않는다.[6]

그리하여 러셀은 「유형 이론에 기초한 수리 논리학」(Mathematical Logic as Based on the Theory of Types)(1908)[7]과 『수학 원리』(*Principia Mathematica*)(1910-1913)에서 새롭게 완성된 형태의 이론을 제시하는데, 이는 보통 분지 유형 이론(ramified theory of types)이라고 불린다. 러셀은 먼저 역설들은 모두 소위 악순환 원리(vicious-circle principle)를 어겼기 때문에 발생한다고

---

4) 러셀은 이 점에 대해서『나의 철학적 발전』에서 다음과 같이 말하고 있다. “내가『수학의 원리들』(1903)을 집필하던 당시에는 단지 조잡한 형태의 유형 이론을 개발했을 뿐이었고, 그런 형태의 유형 이론으로는 문제를 해결할 수 없었다.” 러셀(2008), p. 129.

5)『나의 철학적 발전』에서 러셀은 다음과 같이 말한다. “집합들의 경우에 나는 집합에 대해 생각하는 데 필요한 조건들을 만족시키는 어떤 이론적 개념도 파악하지 못했다고 고백하지 않을 수 없다. 그래서 10장에서 검토한 모순은 무언가 잘못된 점이 있지만 그것이 무엇인지 내가 아직까지 찾아내지 못했다는 것을 증명하고 있다.” 러셀(2008), p. 133.

6)『수학의 원리들』(1903)의 마지막 단락에서 러셀은 “10장의 특수한 모순은 유형들의 이론(doctrine)에 의해 해결되지만, 이 이론에 의해서 해결될 수 없는 최소한 하나의 아주 유사한 모순이 존재한다.”고 말하면서 자신이 완전한 해결책을 발견하는 데 성공하지 못했음을 고백하고 있다. 참고: Russell (1992), p. 528.

7) Russell(1956), pp. 59-102.

진단한다.

> 피해야 할 역설들에 대한 분석은 그것들이 모두 어떤 종류의 악순환으로부터 나온다는 것을 보여준다. 그 문제가 되는 악순환은 대상들의 모임이 그 모임 전체에 의해서 단지 정의될 수 있는 원소들을 포함할 수도 있다고 가정하는 것으로부터 일어난다. 그리하여, 예를 들어, **명제들**의 모임은 “모든 명제들은 참이거나 거짓이다”라고 진술하는 명제를 포함하는 것으로 상정될 것이다. 그렇지만, 그러한 진술은 만일 “모든 명제들”이 어떤 이미 확정된 모임을 지시하지 않는다면 (…) 합법적일 수 없을 것이다.[8]

러셀은 악순환 원리를 다음과 같이 규정한다. “한 모임의 **모든** 것을 포함하는 것은 무엇이든 그 모임의 하나여서는 안 된다.” “만일, 어떤 한 모임이 어떤 한 전체를 지닌다고 할 때, 그것이 단지 그 전체에 의해 정의 가능한 원소들을 지니고 있다면, 그 말해진 모임은 어떤 전체도 지니지 않는다.”[9] 또한 그는 이러한 악순환 원리를 위반했을 때 발생하는 오류를 ‘재귀적 오류’(reflexive fallacies)라고 부른다. 유형들을 구분하는 것은 이러한 재귀적 오류를 피하기 위해 필수적이다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 한 **유형**(type)은 한 명제 함수의 유의미성의 범위로서, 즉 그 말해진 함수가 값들을 갖기 위한 논항들의 모임(collection)으로 정의된다. 한 외관[속박] 변항이 한 명제에 나타날 때마다, 그 외관 변항의 값들의 범위는 한 유형이고, “모든 값들”이 관여하는 함수에 의해서 그 유형은 고정된다. 대상들을 유형들로 나누는 것은 그렇지 않으면 일어나는 재귀적 오류들에 의해 필수적이다.[10]

여기에서 러셀은 『수학의 원리들』(1903)에서와 동일하게 ‘유형’을 한 명제 함수의 유의미성의 범위로 정의하고 있지만, 이제 그

8) Russell & Whitehead(1910), p. 37.
9) Russell & Whitehead(1910), p. 37.
10) Russell(1956), p. 75.

저작과 달리 새롭게 외관 변항(apparent variables, 속박 변항)에 대해 논의하고 있다. 한 명제 함수의 유의미성의 범위뿐만 아니라, “외관 변항의 값들의 범위”도 문제 삼고 있는 것이다. 그리하여 유형 이론은 다소 복잡한 것으로 분지된다. 먼저 주어진 대상 a에 대해서, a가 논항일 수 있는 함수가 주어진다. 이와 함께 그 함수의 논항일 수 있는 다른 대상들도 a와 동일한 유형에 속하는 것으로 규정된다. 그 다음에 그러한 함수들이 논항일 수 있는 함수들에로 나아가며, 계속 이와 같이 진행된다. 러셀은 이렇게 분지된 유형 이론을 구성해야 하는 이유에 대해서 다음과 같이 말하고 있다.

> $f(\phi\hat{z}, x)$를 두 변항 $\phi\hat{z}$와 x의 함수라고 하자. 그러면 잠시 동안 x가 고정된 것으로 간주하고, 이것이 가능한 모든 함숫값 ϕ와 함께 주장될 때, $(\phi).f(\phi\hat{z}, x)$를 얻는다. 여기서 다시 x가 변항이라고 간주하면, x의 함수를 얻는다. 그러나 이러한 함수는 $\phi\hat{z}$에 대한 함숫값 전체를 포함하기 때문에, 악순환 원리에 의해서 그것은 그 자체로 전체 속에 포함된 함숫값 중 하나일 수가 없다. 따라서 $(\phi).f(\phi\hat{z}, x)$와 관련한 $\phi\hat{z}$의 함숫값의 전체는 x가 논항으로 나타날 수 있는 모든 함수 전체가 아니고, x가 논항으로 나타날 수 있는 모든 함수 전체와 같은 것도 없게 된다.[11]

패터슨(W. A. Patterson)은 이를 다음과 같이 간결하게 해명하고 있다.[12] 먼저 다음의 두 문장에 대해 생각해 보자.

(1) 나폴레옹은 지도력이 있다.
(2) 나폴레옹은 위대한 장군의 모든 속성들을 지니고 있다.

(1)은 한 개별자, 즉 유형이 0인 존재자(entity)인 나폴레옹에 대해

---

11) Russell & Whitehead(1910), p. 48-49. 참고: 윌리엄 닐 & 마사 닐(2015), pp. 414-415.

12) 참조: Patterson(1993), pp. 305-307.

서 유형 1인 존재자, 즉 한 속성('지도력이 있음')이 부여되었음을 말해주고 있다. 이는 "완전히 의미 있는" 명제이며, 유형 이론의 제한을 위배하지 않는다. 이제 '지도력이 있음', '총명함', '용기 있음', 그리고 '행정력이 있음'이 위대한 장군이 되기 위한 모든 속성들이라고 가정하자. 그렇게 되면, (2)는 "나폴레옹은 지도력이 있고, 총명하고, 용기 있고, 행정력이 있다"를 뜻하게 될 것이다. 그러나 혹자는 "위대한 장군의 모든 속성들을 지님"도 나폴레옹의 속성이며, 그리하여 (2)는 "나폴레옹은 지도력이 있고, 총명하고, 용기 있고, 행정력이 있으며, 위대한 장군의 모든 속성들을 지니고 있다"를 뜻한다고 간주할 수 있다. 그렇게 되면 (2)는 자기 자신에 의해 정의된 전체를 갖는 것이 된다. 다시 말해, "위대한 장군의 모든 속성들이라는 전체가 자기 자신을 한 원소로 포함"13)하게 되는 것이다. 따라서 이는 어떤 전체도 자기 자신에 의해 정의될 수 없다는 러셀의 악순환 원리를 위반하고 있다.14) 패터슨은 이 상황을 다음과 같이 설명하고 있다.

> 이 문제를 극복하기 위해서 우리는 유형 1의 속성들을 위계로 구분하는 것이 필요하다. 유형 1 속성의 가장 낮은 단계(level)는 어떤 종류의 전체도 포함하지 않는, 좋은 지도자임[지도력이 있음]과 같은 속성들로 이루어진다. 이것들은 유형 1의 1차 속성들(type 1 properties of order 1)이라고 부른다. 유형 1의 2차 속성들(type 1 properties of order 2)은 위대한 장군의 모든 속성들을 지님과 같은 속성들로 이루어진다. 2차 속성들은 1차 속성들의 어떤 모임에 의해 정의된다. 계속해서, 3차 속성들은 2차 속성들

13) Patterson(1993), p. 306.

14) 그리하여 러셀은 다음과 같이 말한다. "따라서 (…) $\phi\hat{z}$가 논항으로 나타나는 함수는 "$\phi\hat{z}$"가 주어진 논항일 수 있는 어떤 함수든 그 함수를 나타내서는 안 되고, "$\phi\hat{z}$"의 가능한 값들인 함수들 중 아무 것도 그러한 함수들의 전체에 대한 어떤 지칭(reference)도 포함하지 않아야 하는 방식으로 제한되어야 한다." Russell & Whitehead(1910), p. 49.

의 전체에 의해 정의되고, 이와 같이 계속된다.[15)]

그러면 이제 러셀이 분지 유형 이론을 어떻게 구성했는지를 간략하게 살펴보기로 하자.[16)] 러셀은 먼저 외관 변항이 없는 명제 함수들을 '매트릭스'라고 부른다. 그는 첫 번째 매트릭스들로서, 값이 다음과 같은 형식들로 되어 있는 명제 함수를 제시한다.

$$\phi x,\ \psi(x,\ y),\ \chi(x,\ y,\ z\ \cdots)$$

여기에서 논항들은 모두 개별자이며, 함수들 ϕ, ψ, χ …은 (정의에 의해서) 어떤 외관 변항도 포함하지 않기 때문에, 함수들의 어떤 총체들도 전제하지 않는다. 이로부터 우리는 가령 $(y).\psi(x,\ y)$, $(\exists y).\psi(x,\ y)$, $(y,\ z)\chi(x,\ y,\ z)$, $(y):(\exists z).\chi(x,\ y,\ z)$를 형성할 수 있는데, 이것들은 모두 "개별자들의 전체를 제외한 어떤 전체도 전제하지 않는다." 러셀은 이러한 함수들을 "1차 함수"(first-order function)라고 부르고, "$\phi!\hat{x}$"로 기호화한다.

다음으로 러셀은 "$\phi!a$는 $\psi!b$를 함축한다"－여기에서 a와 b는 상항이고, ϕ(또는 $\phi!\hat{z}$)와 ψ(또는 $\psi!\hat{z}$)는 변항이다.－와 같은 명제 함수를 다룬다. 그리하여 그는 다음과 같이 두 번째 매트릭스들을 제시한다.

$$f(\phi!\hat{z}),\ g(\phi!\hat{z},\ \psi!\hat{z}),\ F(\phi!\hat{z},\ x).$$

이로부터 일반화를 통하여 우리는 가령, $(\phi).g(\phi!\hat{z},\ \psi!\hat{z})$. $(x).F(\phi!\hat{z},\ x)$ 등을 얻을 수 있는데, 러셀은 이를 "2차 함수"(second-order

15) Patterson(1993), pp. 306-307.

16) 이 절의 이하의 내용은 Russell & Whitehead(1910), pp. 49-55를 요약한 것이다.

function)라고 부른다. 이와 마찬가지로 2차 함수를 논항으로 갖는 명제 함수인 세 번째 매트릭스를 형성할 수 있고, 그렇게 해서 "3차 함수"를 형성할 수 있으며, 계속 이와 같이 진행된다.[17]

더 나아가 러셀은 명제 함수의 위계로부터 명제의 위계를 도출한다. 그는 먼저 어떤 함수도, 그리고 어떤 외관 변항도 포함하지 않는 명제를 **기본 명제**(elementary propositions)라고 부른다.[18] 이는 램지가 지적하듯이 유한하게 많은 원자 명제들의 진리함수이다.[19] 그 다음으로 러셀은 "기본 명제가 아니면서, 어떤 함수도 포함하지 않고, 개별자들을 제외한 어떤 외관 변항도 포함하지 않는 명제"를 **1차 명제**(first-order propositions)라고 부른다. 그렇게 되면 기본 명제와 1차 명제는 1차 함수의 값이 된다. 그 다음에 1차 명제들이 외관 변항들로서 나타날 수 있는 새로운 명제들이 형성될 수 있는데, 러셀은 이를 2차 명제라고 부른다.[20] 마찬가지로 러셀은 n차 명제는 명제 함수의 위계에서 (n-1)차의 외관 변항을 포함하는 것으로 정의한다.

3. 러셀의 서술적 함수와 환원 가능성 공리

러셀의 분지 유형 이론은 러셀의 역설뿐만 아니라 거짓말쟁이 역설, 리샤르의 역설 등 다른 여러 역설들도 제거할 수 있는 해결책을 제공해 준다. 가령 "나는 거짓말하고 있다"는 "나에 의해 긍

---

17) 그러나 러셀은 "한 함수에서 논항들의 수와 외관 변항들의 수는 유한해야 하기 때문에, 우리는 무한 차수의 함수에는 도달하지 않으며, 그러므로 모든 함수의 차수는 유한하다"고 말하고 있다.

18) 이 글에서는 러셀과 램지의 용어인 "elementary proposition"을 『논고』의 "요소 명제"와 구분하기 위해 "기본 명제"로 번역하고 있다.

19) Ramsey(1931), p. 25.

20) Russell(1956), p. 76.

정된 모든 1차 명제들은 거짓이다”가 되고, 이는 2차 명제이며, 이로부터는 어떤 모순도 발생하지 않는다.[21] 뿐만 아니라, 러셀의 역설에 대해서도 악순환 원리에 의거해서 그 해결책을 제시할 수 있다.[22] 그러나 함수와 속성을 위계에 따라 구분하는 것이 여러 역설들을 해소하는 데 성공적이었다고 할지라도, 이러한 분지 유형 이론은 매우 심각한 문제들을 유발한다.[23] 러셀 자신은 이 점을 충분히 알고 있었던 것으로 보인다. 예컨대 그는 라이프니츠의 구별 불가능한 것들의 동일성 원리(principle of the identity of indiscernibles)에 의거하여 동일성을 정의하고자 한다. 그러나 가령 “x는 y와 동일하다”를 “x에 대해 성립하는 것은 무엇이든 y에 대해 성립한다.”, 즉 “(ϕ)(ϕx는 ϕy를 함축한다)”로 정의하면, 여기에서는 모든 차수의 속성들이 등장한다. 그렇게 되면 동일성에 대한

---

21) 참고: Russell(1956), p. 76.

22) 러셀은 이 점에 대해서 다음과 같이 말한다. “자기 자신의 원소들이 아닌 집합들의 집합에 관한 모순을 해결하기 위해서, 우리는, (…) 집합에 관한 명제는 그 집합을 정의하는 함수, 즉 그 집합의 원소들에 의해서만 만족되고 다른 논항들에 의해서는 만족되지 않는 함수에 관한 진술로 항상 환원되어야 한다고 가정할 것이다. 그리하여 한 집합은 예컨대 (x). ϕx가 함수 ϕ$\hat{x}$를 정의하는 것과 마찬가지로, 한 함수로부터 도출되고 그 함수를 전제하는 대상이다. 따라서 한 집합은, 악순환 원리에 의해서, 그것을 정의하는 함수의 논항이 유의미하게 될 수 없으며, 다시 말해, 만일 우리가 ϕ$\hat{z}$에 의해 정의된 집합을 “$\hat{z}$(ϕz)”로 나타낸다면, 기호 “ϕ{$\hat{z}$(ϕz)}”는 무의미해야만 한다. 따라서 한 집합은 그것을 정의하는 함수를 만족하지도 않고 만족하지 않지도 않으며, 그리하여 (…) 자기 자신의 원소도 아니고 자기 자신의 원소가 아닌 것도 아니다. (…) 그리하여 만일 α가 집합이라면, “α는 α의 원소가 아니다”는 항상 무의미하며, 그러므로 “자기 자신의 원소들이 아닌 집합들의 집합”이라는 문구는 어떤 뜻도 지니지 않는다. 따라서 그러한 집합이 존재한다고 가정하는 것으로부터 발생한 모순은 사라진다.” Russell & Whitehead(1910), pp. 62-63, 또한 pp. 75-79 참조.

23) 이러한 난점들에 대해서는 윌리엄 닐 & 마사 닐(2015), pp. 416-417, pp. 426-428, 정인교(1999)를 참고할 것.

정의는 불가능하다. 그리하여 이러한 문제를 해결하기 위해 러셀이 제시한 것이 환원 가능성 공리이다.[24)]

그런데 환원 가능성 공리를 이해하기 위해서는 먼저 러셀의 서술적 함수와 비-서술적 함수의 개념에 대해 이해하는 것이 필요하다. 앞에서 확인할 수 있는 것처럼, 러셀의 분지 유형 이론에서 특징적인 것은 동일한 변항의 명제 함수에 대해서 차수(order)가 상이하게 부여되는 경우가 있다는 점이다. 러셀은 $(y).\psi(x, y)$와 $(\phi). F(\phi!\hat{z}, x)$가 둘 다 x의 함수이지만, 전자를 1차 함수로, 후자를 2차 함수라고 부르고 있다. 가령, “x는 용감하다”와 “x는 위대한 장군이 지니는 모든 속성을 지녔다”는 둘 다 x의 명제 함수이지만, 전자는 x의 1차 명제 함수(또는 1차 속성)이고, 후자는 x의 2차 명제 함수(또는 2차 속성)이다.

이제 가령 ‘지도력 있음’, ‘총명함’, ‘용감함’, ‘행정력 있음’이 위대한 장군이 지니는 모든 속성이라고 가정할 때, “위대한 장군의 모든 속성을 지니고 있음”이라는 속성은 악순환 원리에 따라, “나폴레옹은 위대한 장군의 모든 속성을 지니고 있다”에서 그 모든 속성의 목록 안에 포함되어서는 안 된다는 점을 상기하자. 그럼에도 불구하고 (1)과 (2)는 중요한 차이를 지니고 있다.

(1) 나폴레옹은 지도력이 있다.
(2) 나폴레옹은 위대한 장군의 모든 속성들을 지니고 있다.

이 차이를 러셀은 서술적 함수(predicative function)와 비-서술적 함수(non-predicative function)라는 개념으로 설명한다. 즉 “x는 지도력이 있다”는 서술적 함수이고, “x는 위대한 장군의 모든 속성들을 지니고 있다”는 비-서술적 함수이다. 러셀은 다음과 같이 말한다.

---

24) 참고: Russell & Whitehead(1910), p. 49, pp. 57-58.

> 우리는 이제 하나의 변항을 갖는 함수를 그것이 그것의 논항의 차수 위의 다음 차수이면, 즉 그것이 그 논항을 갖고 있는 것과 양립 가능한 가장 낮은 차수로 되어 있다면 **서술적**(predicative)이라고 정의하겠다. 만일 한 함수가 여러 논항들을 갖고 있다면, 그리고 그 논항들 중에 나타나는 함수의 가장 높은 차수가 n이고, 그 함수가 (n+1) 차수로 되어 있다면, (⋯) 그 함수를 서술적이라고 부른다.[25)]

그리하여 $(y).\psi(x, y)$와 $(y, z)\chi(x, y, z)$는 각각 x의 서술적 함수이고, 또 $(\phi).g(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z})$와 $(x).F(\phi!\hat{z}, x)$는 각각 $\psi!\hat{z}$와 $\phi!\hat{z}$의 서술적 함수이지만, $(\phi).F(\phi!\hat{z}, x)$는 x의 함수이면서, 비-서술적 함수이다. 러셀이 지적하듯이, 일반적으로 "n차의 비-서술적 함수는 n차의 서술적 함수로부터 (n-1)차의 모든 논항들을 외관 변항으로 바꿈으로써 획득된다."[26)] 앞에서 우리는 2차 함수 $F(\phi!\hat{z}, x)$로부터 1차의 논항 ϕ를 외관 변항으로 바꿈으로써 $(\phi).F(\phi!\hat{z}, x)$라는 x의 비-서술적 함수를 얻었다.

환원 가능성 공리란 이러한 모든 비-서술적 함수에 대해서 그것과 형식적으로 동등한 서술적 함수가 존재한다는 공리를 말한다. 두 개의 함수 $\phi\hat{x}$와 $\psi\hat{x}$는 가능한 모든 논항 x에 대해서 ϕx가 ψx와 동치일 때 "형식적으로 동등"(formally equivalent)하다. 요컨대 $(x)(\phi x \equiv \psi x)$가 성립하면, 함수 $\phi\hat{x}$와 $\psi\hat{x}$는 형식적으로 동등하다. 그리하여 환원 가능성 공리는 다음과 같다.

$$\vdash (\exists\psi)(x)(\phi x \equiv \psi!x)$$

환원 가능성 공리에 따르면, 어떤 명제 함수 $\phi\hat{x}$에 대해서도, $\phi\hat{x}$와 형식적으로 동등한 서술적 명제 함수 $\psi!\hat{x}$가 존재한다. 러셀은 바

25) Russell & Whitehead(1910), p. 53.

26) Russell & Whitehead(1910), p. 54.

로 이러한 환원 가능성 공리에 의거해서 동일성의 정의를 다음과 같이 제시한다.

$$a = b. = : (\phi):\phi!a. \supset. \phi!b : \text{Def.}$$

그렇다면 왜 환원 가능성 공리는 참인가? 과연 그것은 설득력 있는 명제인가? 이 점에 대해서 러셀은 다음과 같이 말한다.

> 만일 우리가 어떤 한 대상의 **술어**를 그 대상에 적용되는 서술적 함수라고 부른다면, 한 대상의 술어들은 그것의 속성들 중에 있는 어떤 것일 뿐이다. 예를 들어 '나폴레옹은 한 위대한 장군으로 만드는 모든 성질들을 지녔다'와 같은 명제를 고려해 보자. 여기에는 외관 변항인 한 술어가 존재한다. 만일 우리가 '$\phi!\hat{z}$는 한 위대한 장군에서 요구되는 한 술어이다'를 '$f(\phi!\hat{z})$'로 나타낸다면, 우리의 명제는 다음과 같다.
>
> (ϕ): $f(\phi!\hat{z})$는 $\phi!$(나폴레옹)을 함축한다.
>
> 이 명제는 술어들의 한 전체를 가리키기 때문에, 그것은 그 자체로 나폴레옹의 한 술어가 아니다. 그렇지만 위대한 장군들에게 공통되고 특유한 어떤 한 술어가 존재하지 않는다는 것은 결코 따라 나오지 않는다. 사실상, 그러한 술어가 존재한다는 것은 확실하다. 왜냐하면 위대한 장군들의 수는 유한하고, 그들 각자는 확실하게도 다른 인간들이 지니고 있지 않은 어떤 술어－예컨대, 그의 탄생의 정확한 순간－를 소유하고 있기 때문이다. 그러한 술어들의 선언은 위대한 장군들에게 공통되고 특유한 어떤 한 술어를 구성할 것이다. 만일 우리가 이 술어를 $\psi!\hat{z}$라고 부른다면, 우리가 나폴레옹에 대해서 만들었던 그 진술은 $\psi!$(나폴레옹)과 동등하다. 그리고 이러한 동등성은 만일 우리가 나폴레옹에 대해서 어떤 다른 개별자를 대입시킨다 할지라도 동등하게 성립한다. 따라서 우리는 우리가 나폴레옹에 귀속했던 속성과 항상 동등한 한 술어에 도달한 것이다. 즉 그것은 이 속성을 갖고 있는 대상들에만 속하며, 다른 어떤 것들에도 속하지 않는다. 환원 가능성 공리는 그러한 술어가 항상 존재한다는 것을 (…) 진술한다.27)

러셀에 따르면, “나폴레옹은 위대한 장군의 모든 속성을 지니고 있다”는 어떤 술어들의 선언(가령 “위대한 장군 A는 t_1에 태어났고, B는 t_2에 태어났고, …, Z는 t_n에 태어났다”로부터 얻어지는 “t_1에 태어났거나 t_2에 태어났거나, …, t_n에 태어났다”)에 대해서, 이것을 F라고 부른다면, F(나폴레옹)과 동등하며, 이때 F(나폴레옹)은 서술적 함수이고, 그러한 F가 존재한다는 것은 “확실”하다. 이는 결국 비-서술적 함수에서 술어는 어떤 서술적 함수들의 술어들의 연언이나 선언과 동일하다는 주장과 같다. 그리하여 러셀은 다음과 같이 말한다.

> 환원 가능성 공리는 “술어들의 연언이나 선언은 한 단일한 술어와 동등하다”는 가정과, 즉 만일 우리가 x는 한 함수 $f(\phi!\hat{z})$를 만족하는 모든 술어들을 가지고 있다고 주장한다면, 우리의 가정이 참일 때마다 x가 가지게 될 어떤 한 술어가 존재하고, 그것이 거짓일 때마다 x가 가지게 되지 않을 그러한 어떤 한 술어가 존재한다는 가정과 동등하다. (…) 왜냐하면 이러한 가정에 의해서, 비-서술적 함수의 차수는 하나가 낮아질 수 있고, 따라서 어떤 유한한 수의 단계 후에, 우리는 어떤 비-서술적 함수로부터 형식적으로 동등한 서술적 함수로 나아갈 수 있을 것이기 때문이다.[28]

그렇다면 이러한 환원 가능성 공리가 옳다는 근거는 무엇인가? 러셀은 “귀납적 증거”를 제시한다.

> 환원 가능성 공리의 경우에는, 그것을 옹호하는 귀납적 증거는 아주 강하다. 왜냐하면 그것이 허용하는 추리들과 그것이 이끄는 결과들은 모두 타당해 보이기 때문이다. 그러나 비록 그 공리가 거짓인 것으로 판명되는 것은 거의 가능성이 없을 것으로 보이지만, 그것이 어떤 다른 더 근본적이고 더 명백한 공리로부터 연역되리라는 것은 결코 개연성이 낮은 것은 아니다.[29]

27) Russell & Whitehead(1910), pp. 56-57.
28) Russell & Whitehead(1910), pp. 58-59.
29) Russell & Whitehead(1910), pp. 59-60.

4. 비트겐슈타인의 환원 가능성 공리 비판

혹자는 당연히 논리학의 한 공리나 논리적 명제가 이른바 “귀납적 증거”에 의해 뒷받침된다면, 이는 분명히 무엇인가가 잘못되었다는 신호로 받아들일 것이다. 왜냐하면 논리적 명제는 귀납적 증거를 필요로 하는 경험적 명제와는 엄연히 다른 것이기 때문이다. 마찬가지로 비트겐슈타인은 논리적 명제와 경험적 명제를 날카롭게 구분한다. 그는 1913년 노르웨이에서 러셀에게 보낸 편지에서 환원 가능성 공리에 대해 다음과 같이 말한다.

> 이제 선생님의 환원 가능성 공리에 대해 논의하겠습니다. 우리가 다음과 같은 세계에서 살고 있다고 가정해 보십시오. 그 세계에서는 **사물들**(things)과, 그리고 그 외에도 **오직 하나의 관계**(only one relation)를 제외하면 아무것도 없고, 그 관계는 무한하게 많은 이 사물들 간에 성립하며, 하지만 각각의 모든 것과 각각의 다른 모든 것 사이에는 성립하지 않습니다(does not hold between every one and every other of them). 게다가 유한한 수의 사물들 사이에는 성립하지 않는다고 가정하겠습니다. 그러한 세계에서는 환원 가능성 공리는 확실하게도 성립하지 **않을** 것이라는 점은 분명합니다.[30]

사실상, 이 짧은 언급은 이해하기가 대단히 어렵다. 이제 위의 인용문에서 언급된 세계의 특징을 정리하기로 하자. 즉 이 세계 W는 다음을 만족한다.

(1) 이 세계에는 무한하게 많은 대상들이 존재한다.
(2) 이 세계에는 오직 한 개의 관계만 존재한다.
(3) 그 관계는 오직 무한하게 많은 대상들 사이에서만 성립하며, 유한하게 많은 대상들 사이에서는 성립하지 않는다.

30) Wittgenstein(1961), p.127.

(4) 그 관계는 그 대상들 각각의 모든 것과 그것들과 다른 각각의 모든 대상들 사이에서는 성립하지 않는다.

이제 (1), (2), (3), 그리고 (4)를 만족하는 모델을 생각해 보자. 먼저 yRx라는 관계를 다음과 같이 정의하기로 하자.

(∃z)(y는 x의 직후자이고, 만일 y가 x의 직후자라면 z는 y의 직후자이다.)

관계 yRx는 유한한 대상들 사이에서는 성립하지 않는다. 가령 {1, 2, 3, 4, 5}에서 5는 4의 직후자이지만, 5의 직후자는 존재하지 않는다. 그렇기 때문에, yRx는 오직 무한한 대상들 사이에서만 성립한다.

또한 (0, 1, 2, 3, 4, 5, …)에 대해서 각각의 원소들과 다르게끔 원소들을 배열한다고 하자. 그러면 우리는 가령 (1, 0, 3, 2, 5, 4, …) 또는 (2, 1, 0, 5, 4, 3, …) 등을 얻을 수 있다. 이제 가령,

A = (0, 1, 2, 3, 4, 5, …)
B = (1, 0, 3, 2, 5, 4, …)

에 대해서 A와 B의 동일한 순서에 따른 각각의 대상들에 대해서는 yRx가 모두 성립하지는 않는다. 예컨대 A의 첫 번째 원소 0과 B의 첫 번째 원소 1 사이에는 0R1은 성립하지 않는다. 더 나아가 주어진 A에 대해서 어떤 B를 생각하든 0Rx를 만족하는 x는 존재하지 않으며, 따라서 yRx는 모두 성립할 수는 없다. 그렇기 때문에 모든 각각의 대상들과 다른 각각의 모든 대상들 사이에서 yRx는 모두 성립하지는 않는다.

따라서 나는 비트겐슈타인이 생각하는 W를 만족하는 한 가지 모델은 자연수의 집합과 관계 yRx로 이루어진다고 생각한다(물론 여기에서 W의 대상들은 모두 자연수에 대응한다). 즉 이 모델에서는 (1) 논의역의 대상들은 무한하게 많고, 또 (2) 오직 하나의 관계 yRx가 주어져 있으며, (3) 관계 yRx는 무한한 대상들 사이에서만 성립하고 유한한 대상들 사이에서는 성립하지 않으며, (4) 모든 각각의 대상들과 다른 각각의 모든 대상들 사이에서는 yRx는 성립하지 않는다.

이제 환원 가능성 공리의 반례를 찾기 위해서 W에서는 대상들이 무한하게 많은 속성들을 지닌다고 가정하자. 그리고 (앞으로 다루게 될 바이스만의 모델과 유사하게) 다음과 같이 W의 대상들이 지니는 서술적 속성들을 정의하기로 하자. 즉 W의 한 대상(또는 그것과 대응하는 한 자연수)의 서술적 속성은 그 자연수가 원소이고 또 반드시 그것과 다른 자연수도 원소인 그러한 집합이다. 그 집합에는 어떤 자연수들의 집합도 포함되지 않는다. 가령 {1, 2}는 1의 서술적 속성이고 또 2의 서술적 속성이다. 그러나 그것은 3의 서술적 속성은 아니다. 반면에 {2}는 2의 서술적 속성이 아니다. 왜냐하면 그 집합에는 2와 다른 자연수가 포함되어 있지 않기 때문이다. {2, {5, 6}}은 2의 서술적 속성이 아니다. 왜냐하면 그 집합에는 자연수의 집합 {5, 6}이 포함되어 있기 때문이다.

이제 W에서는 이러한 무한하게 많은 서술적 속성들이 무한하게 많은 대상들에 대해서 만족 가능하다. 그렇게 되면, 이러한 서술적 속성들을 지니는 세계는, 환원 가능성 공리가 성립하지 않는 세계의 조건으로서 바이스만이 제시한 다음 4가지 조건을 충족시킨다.

(1*) 그 세계에는 무한하게 많은 개별자들이 존재한다.
(2*) 각각의 개별자는 무한하게 많은 서술적 속성들을 지닌다.

(3*) 어떤 두 개별자도 그것들의 모든 서술적 속성들을 공통으로 가지지 않는다.

(4*) 한 서술적 속성이 한 개별자에게 속할 때마다 그 속성은 또한 어떤 다른 개별자에 속한다. 달리 말하면, 한 개별자에만 속하는 어떤 서술적 속성도 없다.[31]

다시 말해 이 세계에는 무한하게 많은 자연수들(또는 그것에 대응하는 대상들)이 존재하기 때문에, (1*) 이 세계에는 무한하게 많은 개별자가 존재하고, 각각의 자연수는 자신과 다른 수를 포함하는 무한하게 많은 집합의 원소이기 때문에, (2*) 각각의 개별자는 무한하게 많은 서술적 속성들을 지니며, 어떤 두 자연수도 모든 동일한 집합에 속하는 것은 아니므로. (3*) 어떤 두 개별자도 그것들의 모든 서술적 속성들을 공통으로 가지지 않으며, 한 자연수가 자신과 다른 수를 포함하는 집합에 속할 때마다 어떤 다른 수가 그 집합에 속하므로, (4*) 한 서술적 속성이 한 개별자에게 속할 때마다 그 속성은 또한 어떤 다른 개별자에 속한다.

바이스만은 이러한 세계에서 환원 가능성 공리가 성립하지 않는다는 것을 다음과 같이 증명한다.

> 만일 'a'가 한 개별자의 이름이라면, a와 공통된 모든 서술적 속성들을 지니는 개별자들의 집합 c는 다음에 의해 정의된다.
>
> $$(\phi)\phi!\hat{x} \equiv \phi!a$$
>
> 이렇게 구성된 이 명제 함수는 (모든 서술적 속성들을 거론하고 있으므로) 확실하게도 비-서술적 함수이다. 이것을 $\phi 1\hat{x}$라고 부르자. 그러면 환원 가능성 공리에 따라 다음이 성립하는

31) Waismann(1977), p.2.

$$\vdash (\exists\psi)(\phi 1x \equiv x \ \psi!x)$$

> $\phi 1\hat{x}$와 형식적으로 동등한 서술적 함수 $\psi!\hat{x}$가 존재해야 한다. 그러나 그러한 어떤 서술적 함수도 존재할 수 없다. 그 이유는 다음과 같다. 가정 (3)[(3*)]에 따르면, 어떤 개별자도 그것의 모든 서술적 속성들에서 a와 일치하지 않는다. 그러므로 집합 c는 단일한 개별자 a만을 포함한다. 반면에, 만일 한 서술적 속성이 a에 속한다면, 조건 (4)[(4*)]에 따라서 그것은 또한 [a와] 다른 어떤 개별자에 속한다. 따라서 $\phi 1\hat{x}$와 외연이 같은 어떤 서술적 함수도 존재하지 않는다는 것이 따라 나온다.[32)]

여기에서 바이스만은 먼저 비-서술적 함수 $(\phi)\phi!\hat{x} \equiv \phi!a$를 문제삼고 있으며, 이것을 $\phi_1\hat{x}$라고 부르고 있다. 그러면 환원 가능성 공리에 따라 $\vdash(\exists\psi)(x)(\phi_1 x \equiv \psi!x)$가 성립한다. 이제 그러한 서술적 함수 $\psi!\hat{x}$가 존재한다면, $\phi_1 x$와 $\psi!x$는 형식적으로 동등하므로, $\phi_1 a \equiv \psi!a$가 성립한다. 이제 $(\phi)(\phi!\hat{x} \equiv \phi!a)$를 만족시키는 것은 오직 a뿐이라는 점을 주목하자. 그런데 조건 (3*)에 따라 어떤 두 개별자도 무한한 서술적 속성들을 공유하지 않으므로, 그리고 $\phi_1 a \equiv \psi!a$이므로, $\psi!a$는 성립하며, 더 나아가 $\psi!\hat{x}$를 만족시키는 것은 오직 a뿐이다. 그러나 조건 (4*)에 따르면 이 세계에서는 오직 한 개별자만 어떤 서술적 속성을 지닐 수 없기 때문에 a와 다른 어떤 b에 대해서 $\psi!b$가 성립해야 한다. 이는 모순이다. 그러므로 $\vdash(\exists\psi)(x)(\phi_1 x \equiv \psi!x)$인 그러한 ψ는 존재하지 않는다.

이제 남은 것은 (1*), (2*), (3*), 그리고 (4*)로부터 모순이 나오지 않는다는 것, 즉 그것들이 무모순임을 보이는 것이다. 바이스만은 다음과 같은 방법으로 그 무모순성을 보임으로써 자신의 증명을 완결하고 있다. 유리수의 체계를 생각하고, 각각의 유리수가 (1*), (2*), (3*), 그리고 (4*)를 만족하는 세계의 개별자들에 대응된다고

---

32) Waismann(1977), p.2. 여기에서 $\vdash(\exists\psi)(\phi_1 x \equiv_x \psi!x)$는 $\vdash(\exists\psi)(x)(\phi_1 x \equiv \psi!x)$를 뜻한다.

가정하자. 또한 r이라는 유리수에 대해서 그것을 포함하는 유리수들의 집합들(또는 개구간들)이 r에 대응하는 개별자의 서술적 속성들에 대응된다고 가정하자. 그러면 (1*)는 무한하게 많은 유리수들이 존재한다는 것을, (2*)는 각각의 유리수 r은 무한하게 많은 개구간들 안에 놓인다는 것을, (3*)는 어떤 두 개의 유리수도 모든 개구간들 안에 함께 놓이지 않는다는 것을, 그리고 (4*)는 각각의 개구간은 한 유리수보다 더 많은 것을 포함한다는 것을 말한다. 그렇기 때문에 (1*), (2*), (3*), 그리고 (4*)를 모두 만족하는 모델이 존재하며, 그리하여 (1*), (2*), (3*), (4*)는 무모순이다.[33]

그런데 바이스만의 논문 「환원 가능성 공리의 본성」(The Nature of the Axiom of Reducibility)[34]은 1928년에 출판된 것이었으며, 이보다 앞서서 환원 가능성 공리가 논리적 명제가 아니라고 간략하게 증명한 논문이 있었다. 바로 램지의 「수학의 기초들」(The Foundations of Mathematics)(1925)[35]이다. 이 논문에서 램지는 바이스만과 마찬가지로 무한하게 많은 개별자들과 무한하게 많은 서술적 함수들(또는 원자적 함수들)이 주어진 세계를 상정한다.[36] 램지는 환원 가능성 공리가 동어반복이 아니고 거짓 명제일 수 있다는 것을 다음과 같이 설명한다.

> 왜냐하면 무한하게 많은 원자 함수들이 존재하고, 어떤 개별자 a가 존재해서 우리가 어떤 원자 함수를 선택하든지간에 다른 모든 함수들에 관해서 a와 일치하는 다른 개별자가 존재하지만, 그 선택한 함수에 관해서는 그러하지 않는 것은 분명하게도 가능하기 때문이다(For it is clearly possible that there should be an infinity of atomic functions, and an individual *a* such that

33) Waismann(1977), p.3.

34) Waismann(1977), pp. 1-3.

35) Ramsey(1931), pp. 1-61.

36) 다시 말해 램지 또한 바이스만의 조건 (1*)와 (2*)가 충족되는 세계를 상정하고 있다.

> whichever atomic function we take there is another individual agreeing with *a* in respective all the other functions, but not in respect of the function taken). 그렇게 되면 (ф)(ф!x ≡ ф!a)는 x의 어떤 기본 함수(elementary function)와도 동등할 수 없을 것이다.[37)]

사실상 램지의 이 짧은 언급은 이해하기가 매우 어렵다. 반면에 앞에서 확인한 바이스만의 4가지 조건을 염두에 둔다면 우리는 이 어려운 터널을 통과할 수 있다. 가령 우리가 f_1, f_2, f_3, ⋯, f_n이라는 서술적 함수(또는 서술적 속성)를 선택한다고 하자. 이제 램지의 설명에 따르면, f_1a, f_2a, f_3a, ⋯, f_na가 성립하지만 a와 다른 임의의 대상 b가 f_1x, f_2,x, f_3x, ⋯, f_nx를 모두 만족하지는 않는 것은 가능하다.[38)] 더 나아가 f_1x, f_2,x, f_3x, ⋯, f_nx와 다른 모든 임의의 함수 gx에 대해서는 어떤 b가 존재해서 ga ≡ gb이고, ga와 gb가 둘 다 성립하는 경우도 가능하다. 결론적으로 이 세계에서는 (3*) 어떤 두 개별자도 그것들의 모든 서술적 속성들을 공통으로 가지지 않는다. 왜냐하면 ga ≡ gb이므로, ga와 gb가 성립할 때, a는 b와 g를 공통으로 갖지만, f_1x, f_2,x, f_3x, ⋯, f_nx에 대해서는 그렇지 않기 때문이다. 또한 이는 임의의 대상 b에 대해서도 성립한다. 마찬가지로 이 세계에서는 (4*) 한 서술적 속성이 한 개별자에게 속할 때마다 그 속성은 또한 어떤 다른 개별자에 속한다. 왜냐하면 ga ≡ gb이므로, ga가 참이면 gb도 참이 될 것이기 때문이다.

---

37) Ramsey(1931), p. 57. Wahl(2011)은 이 인용문과 비트겐슈타인의 노르웨이 편지를, 그리고 Black(1964)은 후자를 인용하고 있지만(p. 328), 둘 다 전혀 그 내용을 해명하지 못하고 있다.

38) 물론 n = 1인 경우에도 성립한다.

5. 맺는 말

앞에서 우리는 러셀의 환원 가능성 공리가 무엇이며, 또 비트겐슈타인, 램지, 그리고 바이스만이 환원 가능성 공리가 성립하지 않는 모델을 어떻게 착안하거나 구성했는지를 살펴보았다. 나는 특히 비트겐슈타인의 모델로부터 필요한 변경을 가하여 램지와 바이스만의 모델을 각각 유도할 수 있다는 것을 보이고자 노력했다. 사실상 그들의 모델이 모두 무한하게 많은 대상들을 포함한다는 점에서 (그리하여 비트겐슈타인의 모델이 무한하게 많은 서술적 속성들을 예견하고 있고, 램지와 바이스만의 모델이 무한하게 많은 서술적 속성들을 포함하고 있다는 점에서) 일치한다는 것은 단지 우연이 아닐 것이다. 왜냐하면 실제로 비트겐슈타인의 첫 번째 제자는 램지였고, 두 번째 제자는 바이스만이었기 때문이다.

레이 몽크의 보고에 따르면, 램지는 1923년 9월 17일 푸흐베르크에 있는 비트겐슈타인을 방문했고, 2주일가량 머물렀는데, “이 동안 비트겐슈타인은 매일 다섯 시간을－그가 2시에 학교 수업이 끝난 후부터 저녁 7시까지－램지와 함께 『논고』를 한 줄 한 줄 검토했다.”[39] 램지의 편지에 따르면, 비트겐슈타인과 램지는 “한 시간에 한 페이지 정도” 읽어나갔다. 또한 레이 몽크에 따르면, “비트겐슈타인과 램지 모두에게, 램지가 그 책을 완전히 그리고 마지막까지 상세하게 이해하는 것이 중요했다.”[40] 한편 바이스만은 최소한 1927년 여름경에 비트겐슈타인을 처음 만났고[41], 1929년 12월 18일부터 시작되는 『비트겐슈타인과 비엔나 학파』의 대화는 바로 바이스만이 기록한 것이었다. 특히 바이스만의 “논제들”(Theses)[42]

39) 레이 몽크(2000), p. 299.
40) 레이 몽크(2000), p. 300.
41) 레이 몽크(2000), p. 341.
42) Wittgenstein(1979), pp. 233-261.

은 그가 『논고』를 재구성한 것이었으며, 비트겐슈타인으로부터 "재탕"(rehash)[43]이라는 비판을 받은 후 집필을 그만둔 것이었다.

그렇기 때문에 램지는 비트겐슈타인이 왜 환원 가능성 공리가 논리적 명제가 아니라고 생각하는지를 직접 질문했을 것이며, 비트겐슈타인 자신의 대답을 들었을 것이다. 더 나아가 바이스만은 조건 (1*), (2*), (3*), (4*)를 제시할 때 자신의 논문 각주에서 램지의 논문과 (앞에서 논의한 인용문의) 언급을 지목하고 있다.[44] 그리하여 나는 램지와 바이스만의 모델은 모두 비트겐슈타인의 모델이나 착상으로부터 연유한 것이라고 생각한다.[45]

그렇다면 왜 환원 가능성 공리는 그것이 참이라면 운 좋은 우연에 의해서만 그럴 수 있는가? 우리는 앞에서 환원 가능성 공리가 참일 수 있는 경우를 확인하였다. 즉 러셀의 생각과 같이 어떤 유한한 속성들의 선언을 하나의 속성으로 간주하는 것이 가능한 경우가 있다면, "x는 위대한 장군의 모든 속성을 지니고 있다"와 같은 비-서술적 함수는 "x는 t_1에 태어났거나 t_2에 태어났거나, …, t_n에 태어났다"와 같은 서술적 함수와 동등하다. 또는 위대한 장군의 모든 속성이 '지도력 있음', '총명함', '용감함', '행정력 있음'이고 또 이것뿐이라면, "x는 위대한 장군의 모든 속성을 지니고 있다"는 "x는 지도력 있고 총명하고 용감하고 행정력 있다"와 동등하다. 그러나 이는 속성들이 유한하게 많은 경우에만 성립할 뿐이다. 대상들과 속성들이 무한하게 많은 경우에는 러셀은 그러한 속성들의 연언이나 선언을 생각할 수 없을 뿐 아니라, 그러한 무한한 속성들의 연언이나 선언으로서의 속성이 과연 존재하는지도 말할 수 없다.

---

43) Wittgenstein(1979), p. 184.

44) Waismann(1977), p. 3.

45) 물론 바이스만이 램지의 논문으로부터 착상을 얻고 카르납에게서 도움을 받아 독자적으로 자신의 증명을 제시했을 가능성도 있다. 참고: Waismann (1977), p. 3.

그렇기 때문에 대상들과 속성들이 무한하게 많은 경우를 생각한다면, 환원 가능성 공리는 만일 그것이 참인 경우가 있다면 그저 운 좋은 우연에 의해 그럴 수 있을 뿐이다. 또한 그것은 어떤 경우에는 참일 수 있고 다른 경우에는 거짓일 수 있으므로, 논리적 명제, 즉 동어반복이 아니다.

이제 이러한 문제의 핵심에는 일반성 개념을 어떻게 파악해야 하는가 하는 문제가 놓여있음을 주목하자. 러셀은 매트릭스로부터 일반화함으로써 양화된 명제 함수와 양화 명제를 얻는다. 반면에 비트겐슈타인은 『논고』에서 보편 명제를 (ξ-조건 하에서)[46] 무한 연언 명제로, 그리고 존재 명제를 무한 선언 명제로 파악한다. 즉 『논고』에 따르면, x의 모든 값들이 a, b, c, d, …라면, $N(\bar{\xi}) = \sim fa \;\&\; \sim fb \;\&\; \sim fc \;\&\; \sim fd \;\&\; \cdots = \sim(\exists x)fx = (x)\sim fx$이다. 또한 x의 모든 값들이 a, b, c, d, …라면, $(\exists x).fx = fa \vee fb \vee fc \vee fd \vee \cdots$이다.[47] 따라서 러셀의 비-서술적 명제 함수 $(\phi)F(\phi!\hat{z}, x)$는 『논고』에 따르면, ϕ의 모든 값들이 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, …라면, $F(\phi_1!\hat{z}, x) \;\&\; F(\phi_2!\hat{z}, x) \;\&\; F(\phi_3!\hat{z}, x) \;\&\; \cdots$가 될 것이다.

그렇기 때문에 무한 연언 명제와 무한 선언 명제를 허용하는 『논고』의 관점에서는 러셀의 서술적 함수와 비-서술적 함수는 본질적인 차이를 지니지 않는다. 실제로 램지는 바로 이러한 비트겐슈타인의 생각을 받아들인 후, 러셀의 “기본 명제”(elementary proposition)와 “서술적 함수”를 새롭게 다시 정의하고 있다.[48] 더 나아가 램지는 단순 유형 이론은 “의심의 여지없이 옳으며”[49], 반면에 분지 유형 이론이 환원 가능성 공리를 요구한다는 것은 분지

46) 참고: 박정일(2014).

47) “ξ의 값들이 x의 모든 값들에 대한 함수 fx의 값 전체라면, $N(\bar{\xi}) = \sim(\exists x)fx$가 된다.”(5.52)

48) Ramsey(1931), pp. 38-39.

49) Ramsey(1931), p. 24.

유형 이론이 잘못된 것임을 결정적으로 보여주는 증명이라고 간주한다.[50] 물론 지금 우리는 비트겐슈타인이 『논고』의 일반성 개념을 포기했다는 것을 알고 있다. 다시 말해, 그는 1929년에 철학에 복귀한 후에, 무한 연언 명제와 무한 선언 명제가 명제들의 진리함수라는 생각에 오류가 있었음을 인정하고 있다.[51] 그러나 그렇다 하더라도 환원 가능성 공리가 성립하지 않는다는 것을 보이는 비트겐슈타인, 램지, 그리고 바이스만의 모델은 지금도 여전히 유효하다.

---

50) Ramsey(1931), p. 29.

51) 참고: 박정일(2014).

참고문헌

박정일 (2014), “『논리-철학 논고』의 일반성 개념에 관하여”, 『논리 연구』, 17집 1호, pp. 1-31.

정인교 (1999), “유형론적 이론들과 표현력의 한계”, 『인문논총』, 29집, pp. 191-205.

러셀 (2008), 『나는 이렇게 철학을 하였다』, 곽강제 옮김, 서광사.

레이 몽크 (2000), 『루드비히 비트겐슈타인: 천재의 의무 1』, 남기창 옮김, 문화과학사.

비트겐슈타인 (2006), 『논리-철학 논고』, 이영철 옮김, 책세상.

윌리엄 닐 & 마사 닐 (2015), 『논리학의 역사 2』, 박우석 외 옮김, 한길사.

Black, M. (1964), *A Companion to Wittgenstein's ‘Tractatus’*, New York: Cornell University Press, Ithaca.

Patterson, W. A. (1993), *Bertrand Russell’s Philosophy of Logical Atomism*, New York: Peter Lang Publishing, Inc.

Ramsey, F. P. (1931), *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge & Kegan Paul LTd.

Russell, B. (1956), *Logic and Knowledge*, New York: The Macmillan Company.

Russell, B. (1959), *My Philosophical Development*, London: George Allen & Unwin Ltd.

Russell, B. (1992), *The Principles of Mathematics*, London: Routledge.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910), *Principia Mathematica*, volume 1, Merchant Books.

Wahl, R. (2011), “The Axiom of Reducibility”, *The Journal of Bertrand Russell Studies*, 31(1), pp. 45-62.

Waismann, F. (1977), *Philosophical Papers*, D. Reidel Publishing

Company.
Wittgenstein, L. (1961), *Notebooks 1914-1916*, translated by G. E. M. Anscombe, New York and Evanston: Harper & Row Publishers.
Wittgenstein, L. (1979), *Wittgenstein and the Vienna Circle*, translated by J. Schulte and B. McGuinness, Basil Blackwell.
Wittgenstein, L. (1922), *Tactatus Logico-Philosophicus*, translated by C. K. Ogden, London, Boson and Henley: Routledge & Kegan Paul LTD.

숙명여자대학교 기초교양대학
Sookmyung Women's University, College of General Education
willsam@sookmyung.ac.kr

Wittgenstein on the Axiom of Reducibility

Jeong-il Park

Wittgenstein criticizes explicitly Russell's theory of types and, in particular, his axiom of reducibility in the *Tractatus Logico-Philosophicus*. What, then, is the point of Wittgenstein's criticisms of Russell's theory of types? As a preliminary study to answer this question, I will examine how Wittgenstein criticized Russell's axiom of reducibility. Wittgenstein declares that Russell's axiom of reducibility is not a logical proposition, that if it is true it will be so mere by a happy chance and that "we can imagine a world in which the axiom of reducibility is not valid." What, then, is the ground for that? I will endeavor to show that by explicating the ideas of Wittgenstein's 1913 letter to Russell, those ideas decisively influenced on Ramsey's and Waismann's model which intended to show that the axiom of reducibility is not valid.

Key Words: Wittgenstein, *Tractatus*, The Axiom of Reducibility, Russell, Ramsey, Waismann