논리연구 16-3(2013) pp. 437-452

MTL의 표준 완전성*

양 은 석

【국문요약】 이 논문에서 우리는 다음의 두 가지를 보인다. 첫째로 양은석(2009)에서 소개된 체계 $\mathbf{UL_{wt}}$를 위한 표준 완전성 증명에 문제가 있음을 보인다. 둘째로 이러한 증명은 대신 모노이드 t-규범 논리 **MTL**을 위한 새로운 표준 완전성 증명에 사용될 수 있음을 보인다.

【주요어】 퍼지 논리, 모노이드, t-규범, MTL.

접수일자: 2013.04.28 심사 및 수정 완료일: 2013.07.15 게재확정일: 2013.08.17
* 이 논문은 2013년도 전북대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음. 논문이 교정되는 데 도움을 준 익명의 심사위원들께 감사드린다.

1. 들어가는 말

양은석은 그의 2009년 논문에서 예네이(Jenei)와 몬테그나(Montagna) 방식의 표준 완전성 증명이 유니놈 논리 **UL**의 확장 **t-**약화를 갖는 유니놈 논리 $\mathbf{ULw_t}$에 제공될 수 있다는 것을 보였다. 이 논문에서 필자는 먼저 당시 논문에 제공된 표준 완전성 증명에 문제가 있다는 점을 보인다. 보다 구체적으로 t-약화를 만족하는 유니놈이 t-규범에 해당한다는 것을 보인다. 이를 통해 t-약화를 만족하는 유니놈이 단위 실수 [0, 1] 위에서 t-규범 보다 약한 원리를 만족하는 것이 아님을 따라서 약화 없는 퍼지 논리를 위한 표준 완전성 증명이 될 수 없음을 입증한다. 둘째로 양은석 (2009)에서 제공된 표준 완전성 증명 방식이 예네이와 몬테그나에 의해 제공된 모노이드 t-규범 논리(Monoidal t-norm logic) **MTL**을 위한 새로운 표준 완전성 증명이 될 수 있음을 입증한다. 즉 예네이와 몬테그나의 증명의 변형을 통해 제공된 표준 완전성 증명이 **MTL**에 사용될 수 있음을 입증한다.

이 논문은 양은석 (2009)의 논문의 연속 작업이기 때문에 위 두 가지를 입증하는 최소 작업을 수행한다. 즉 이 논문은 특별한 언급이 없이 양은석 (2009)에서 사용된 기호법과 결과, 정의 등을 사용하고 필요한 내용을 최소 한도로 소개한다. 그리고 이 논문을 처음 읽는 독자들이 양은석 (2009)의 기호법과 결과들에 익숙하다는 것을 전제한다.

2. 구문론

우리는 **t-**약화 퍼지 논리 $\mathbf{ULw_t}$와 t-규범 논리 **MTL**을 유니놈 논리 **UL**의 확장으로 소개한다. 명제 체계의 구성과 정의는 양은석

(2009)를 따른다. 이해를 돕기 위해 ϕ^n_t는 $\phi_t := \phi \wedge \mathbf{t}$인 n개의 인자를 갖는 $\phi_t \,\&\, \cdots \,\&\, \phi_t$로 정의된다는 데 주목하자.

우리는 먼저 다음의 유니놈 논리 **UL**의 공리화를 가지고 시작한다.

정의 2.1 **UL**은 다음의 공리 도식들과 추론 규칙에 의해 구성된다.

A1. $\phi \to \phi$

A2. $(\phi \wedge \psi) \to \phi$, $(\phi \wedge \psi) \to \psi$

A3. $((\phi\to\psi) \wedge (\phi\to\chi)) \to (\phi\to(\psi\wedge\chi))$

A4. $\phi \to (\phi \vee \psi)$, $\psi \to (\phi \vee \psi)$

A5. $((\phi\to\chi) \wedge (\psi\to\chi)) \to ((\phi\vee\psi)\to\chi)$

A6. $\phi \to \mathbf{T}$

A7. $\mathbf{F} \to \phi$

A8. $(\phi \,\&\, \psi) \to (\psi \,\&\, \phi)$

A9. $(\phi \,\&\, \mathbf{t}) \leftrightarrow \phi$

A10. $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$

A11. $(\phi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\phi \,\&\, \psi) \to \chi)$

A12. $(\phi \to \psi)_t \vee (\psi \to \phi)_t$

$\phi \to \psi, \phi \vdash \psi$ (긍정식)

$\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$ (연접)

정의 2.2 한 논리가 **L**의 공리적 확장이라는 것은 그것이 **L**에 공리 도식을 덧붙임으로써 얻어진다는 것과 동치이다. (편의상 우리는 공리적 확장을 단순히 확장으로 부른다.) 특히 다음은 **UL**을 확장하는 논리들이다.

- **t**-약화 유니놈 논리 **UL**w_t: **UL** + (**t**-약화) $(\phi \,\&\, \psi)_t \to \phi$
- t-규범 논리 **MTL**: **UL** + (약화) $\phi \to (\psi \to \phi)$

다음은 알려진 결과이다.

명제 2.3 (i) **UL**은 다음을 증명한다.

(1) $(\phi \ \& \ (\psi \ \& \ \chi)) \leftrightarrow ((\phi \ \& \ \psi) \ \& \ \chi)$ (&-결합)

(2) $(\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi)$ (전선형)

(3) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \ \& \ \chi \rightarrow (\psi \ \& \ \chi))$ (단조)

(ii) **MTL**은 (**t**-약화)와 다음을 증명한다.

(1) $(\phi \ \& \ \psi) \rightarrow \phi$

(2) $\mathbf{t} \leftrightarrow \mathbf{T}$.

이론은 식들의 집합 T이다. 논리 **UL** 위에서 T에서 증명은 다음과 같은 식들의 열이다. 그것의 구성원이 **UL**의 공리이거나 T의 원소이거나 규칙 긍정식과 연접을 사용해서 열의 이전 구성원들로부터 따라 나온다. $T \vdash \phi$, 보다 정확히 $T \vdash_{\mathbf{UL}} \phi$는 ϕ가 **UL**에 관한 한 T에서 증명될 수 있다는 것 즉 T에서 ϕ의 **UL**-증명이 있다는 것을 의미한다. **UL**을 위한 연관 연역 정리는 다음과 같다.

명제 2.4 T를 이론, ϕ, ψ를 식들이라고 하자.

(i) $T \cup \{\phi\} \vdash_{\mathbf{UL}} \psi$는 $T \vdash_{\mathbf{UL}} \phi^{n}_{\mathbf{t}} \rightarrow \psi$를 만족하는 n이 있다는 것과 동치(iff)이다.

(ii) $T \cup \{\phi\} \vdash_{\mathbf{MTL}} \psi$는 $T \vdash_{\mathbf{UL}} \phi^{n} \rightarrow \psi$를 만족하는 n이 있다는 것과 동치(iff)이다.

증명: Novak (1990)와 Hájek (1998)를 보라. □

$T \vdash \mathbf{F}$일 경우 이론 T는 비일관적(inconsistent)이고, 그렇지 않을 경우 T는 일관적이다.

편의상, “$\sim$”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\rightarrow$”를 문장 연결사와 대수 연산자로 애매하게 사용한다. 하지만 문맥이 그 의미를 분명히 해 줄 것이다.

3. 의미론

논리 **UL**을 위한 적절한 대수적 구조는 교환 모노이드 잔여 속들(commutative monoidal residuated lattices)의 부분버라이어티(subvariety)로 정의된다.

정의 3.1 (i) *강조된 닫힌 교환 잔여 속(pointed bounded commutative residuated lattice)*은 아래와 같은 구조 **A** = (A, ⊤, ⊥, t, f, ∧, ∨, *, →)이다.

(Ⅰ) (A, ⊤, ⊥, ∧, ∨)은 최대, 최소 원소 ⊤, ⊥를 갖는 닫힌 속(bounded lattice)이다.

(Ⅱ) (A, *, t)는 다음을 만족한다. 어떤 t와 모든 x, y, z ∈ A에 대하여,

(a) $x * y = y * x$ (교환(commutativity))

(b) $t * x = x$ (항등(identity))

(c) $x * (y * z) = (x * y) * z$ (결합(associativity))

(Ⅲ) 모든 x, y, z ∈ A에 대하여,

$y \leq x \rightarrow z$ iff $x * y \leq z$ (잔여(residuation))

(ii) *UL-대수(UL-algebra)*는 다음을 만족하는 강조된 닫힌 교환 잔여 속이다. x, y ∈ A에 대하여,

(t-전선형) $t \leq (x \rightarrow y)_t \vee (y \rightarrow x)_t$.

강조된 닫힌 교환 잔여 속들의 집합(class)은 체계 **MAILL**을 특징 짓는다. 따라서 우리는 앞으로 그러한 속을 MAILL-대수로 명

명한다.

(Ⅱ-b, c)를 만족하는 (A, *, t)는 *모노이드(monoid)*이다. 따라서 (Ⅱ-a, b, c)를 만족하는 (A, *, t)는 교환 모노이드이다. MAILL-대수의 순서가 선형적일 때 즉 각각의 쌍 x, y에 대하여, $x \leq y$이거나 $y \leq x$ (동치로, $x \wedge y = x$이거나 $x \wedge y = y$)일 때, 그 대수는 선형적으로 순서지어진다(linearly ordered)고 한다.

정의 3.2 (i) (ULw_t-대수) *ULw_t-대수(ULw_t-algebra)*는 다음을 만족하는 UL-대수이다. 모든 $x, y \in A$에 대하여,

(t-약화) $(x * y) \wedge t \leq x$.

(ii) (MTL-대수) *MTL-대수(MTL-algebra)*는 다음을 만족하는 UL-대수이다. 모든 $x, y \in A$에 대하여,

(약화) $x \leq y \rightarrow x$.

MTL-대수는 일반적으로 $t = \top$를 만족하는 UL-대수로 정의된다. 여기서는 공리와 그에 상응하는 대수적 성질을 강조하기 위해 약화 원리를 만족하는 대수로 정의한다.

정의 3.3 (값 매김) **A**가 UL-대수라고 하자. ***A*-*값 매김***은 다음을 만족하는 함수 $v : FOR \rightarrow \mathbf{A}$이다. $v(\phi \rightarrow \psi) = v(\phi) \rightarrow v(\psi)$, $v(\phi \wedge \psi) = v(\phi) \wedge v(\psi)$, $v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \vee v(\psi)$, $v(\phi \,\&\, \psi) = v(\phi) * v(\psi)$, $v(\mathbf{F}) = \perp$, $v(\mathbf{f}) = f$, (그리고 $v(\sim\phi) = \sim v(\phi)$, $v(\mathbf{T}) = \top$, $v(\mathbf{t}) = t$).

정의 3.4 **A**는 UL-대수, T는 이론, ϕ는 식, K는 **A**-대수들의 집합(class)라고 하자.

(i) (항진(Tautology)) 각각의 **A**-값 매김 v에 대하여, $v(\phi) \geq t$일

때, ϕ는 **A**에서 *t-항진* 간단히 ***A*-*항진***이다 (또는 ***A*-*타당***하다).

(ii) (모델(Model)) 임의의 $\phi \in T$에 대하여, $v(\phi) \geq t$일 때, ϕ는 T의 **A**-*모델*이다. *Mod(T, A)*에 의해 우리는 T의 **A**-모델들의 집합(class)를 지시한다.

(iii) (의미론적 귀결) 각각의 $\mathbf{A} \in K$에 대하여, $\mathrm{Mod}(T, \mathbf{A}) = \mathrm{Mod}(T \cup \{\phi\}, \mathbf{A})$일 때, ϕ는 K에 관한 한 T의 의미론적 귀결이다. $T \vDash_K \phi$에 의해 우리는 이러한 귀결을 지시한다.

정의 3.5 (**UL**-대수) T는 이론, ϕ는 식, **A**는 UL-대수라고 하자. ϕ가 T에서 UL-증명가능 할 때마다 즉 $T \vdash_{\mathbf{UL}} \phi$일 때, **A**의 집합에 관한 한 ϕ가 의미론적 귀결일 때 우리는 **A**를 ***UL*-*대수***라고 부른다. *$MOD^{(l)}$(**L**)*에 의해 우리는 (선형적으로 순서 지어진) **UL**-대수들의 집합을 지시한다. 아울러 $T \vDash_{\mathrm{MOD}^{(l)}(\mathbf{UL})} \phi$ 대신 $T \vDash^{(l)}_{\mathbf{UL}} \phi$라고 쓴다.

$\mathbf{ULw_t}$-대수와 **MTL**-대수는 마찬가지 방식으로 정의된다.

각 체계들에 관한 한 우리는 다음의 강한 (대수적) 완전성을 증명할 수 있다.

정리 3.6 (강한 완전성) T를 이론 ϕ는 식이라고 하자.

(i) (Metcalfe & Montagna (2007)) $T \vdash_{\mathbf{UL}} \phi$ iff $T \vDash_{\mathbf{UL}} \phi$ iff $T \vDash^{1}_{\mathbf{UL}} \phi$.

(ii) (양은석 (2009)) $T \vdash_{\mathbf{ULwt}} \phi$ iff $T \vDash_{\mathbf{ULwt}} \phi$ iff $T \vDash^{1}_{\mathbf{ULwt}} \phi$.

(iii) (Esteva & Godo (2001)) $T \vdash_{\mathbf{MTL}} \phi$ iff $T \vDash_{\mathbf{MTL}} \phi$ iff $T \vDash^{1}_{\mathbf{MTL}} \phi$.

4. t-약화 유니놈과 t-규범

유니놈들과 t-규범들, 그리고 t-약화를 갖는 유니놈들은 Metcalfe & Montagna (2007)과 양은석 (2009)에서 소개되었다. 여기서는 각각의 정의를 환기하는 수준에서 소개한다. 그리고 t-약화를 갖는 유니놈들이 t-규범이라는 것을 증명한다.

우리는 이 절에서 1, 0, e, ∂ 을 사용하여 단위 실수 [0, 1] 위에서 $\top$, $\bot$, t, f를 각각 표현한다. 먼저 표준 대수를 정의한다.

정의 4.1 A 임의의 대수가 표준적(standard)이라는 것은 그것의 속 환원(reduct)이 [0, 1]이라는 것과 동치(iff)이다.

정의 4.2 (i) 임의의 유니놈은 다음을 만족하는 함수 $\circ : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$이다. 임의의 x, y, z $\in$ [0, 1]에 대하여,

(a) $x \circ y = y \circ x$ (교환)

(b) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (결합)

(c) $x \leq y$ 라면, $x \circ z \leq y \circ z$ 이다 (단조성)

(d) $e \circ x = x$ (항등)

(ii) 임의의 t-약화 유니놈은 다음을 만족하는 유니놈이다.

(t-약화) $\min\{x \circ y, e\} \leq x$

(iii) 임의의 t-규범은 다음을 만족하는 유니놈이다.

(적분) 1 = e.

연산 $\circ$이 잔여화 된다(*residuated*)는 것은 [0, 1] 위에서 잔여(residuation) 성질을 만족하는 함의 $\rightarrow : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$이 있다는 것을 의미한다.

체계 **UL**의 표준 완전성과 관련하여 임의의 유니놈의 가장 중요

한 성질은 *좌-연속(left-continuity)*이다. 임의의 유니놈 ○이 주어졌을 때, ○에 의해 결정된 *잔여화 된 함의(residuated implication)* →는 모든 x, y ∈ [0, 1]에 대하여, x → y := sup{z ∈ [0, 1] : x ○ z ≤ y}로 정의된다.

명제 4.3 t-약화 유니놈들은 t-규범들이다.

증명: 먼저 (적분)원리에 의해 항등원 e가 [0, 1]에서의 최대값 1과 일치하는 유니놈이 t-규범이라는 데 유의하자. 먼저 [0, 1]에서 x < e인 경우를 고려하자. (t-약화)에 의해 min{x ○ y, e} ≤ x이기 때문에 우리는 min{x ○ 1, e} ≤ x를 갖고 이로 인해 x ○ 1 ≤ x를 얻게 된다. 다른 한편 x = x ○ e ≤ x ○ 1이고 따라서 x < e에 대해 x = x ○ 1이다. 이제 ○의 좌-잔여 성질에 의해 e ○ 1 = sup{x ○ 1: x < e} = sup{x : x < e} = e이다. 하지만 (항등) 원리에 의해 e ○ 1 = 1이다. 따라서 e = 1이고 그러므로 이 유니놈은 t-규범이다.[1] □

언급 4.4 명제 4.3은 단위 실수 [0, 1] 위에서 t-약화 유니놈들이 t-규범들이기 때문에 양은석 (2009)에서 증명된 **t-**약화 유니놈 논리 **ULw$_t$**을 위한 표준 완전성 증명이 약화 없는 유니놈이 아닌 약화를 포함한 t-규범에 관한 한 표준적으로 완전하다는 것을 함축한다. 즉 **ULw$_t$**은 t-규범들에 관한 한 표준적으로 완전할 뿐 약화 없는 유니놈들에 대해서는 그렇지 않다.

1) 이 증명의 기본 아이디어는 필자의 출판되지 않은 논문의 심사자에 의해 제공된 것이다.

5. MTL을 위한 표준 완전성

이 절에서는 좌-연속 t-규범들을 특징짓는 논리로 널리 알려진 모노이드 t-규범 논리 **MTL**을 위한 표준 완전성 즉 단위 실수 [0, 1] 위에서의 완전성을 보인다. 이 체계를 위한 표준 완전성은 2002년 예네이와 몬테그나에 의해 Jenei & Montagna (2002)에서 증명되었다. 우리는 이 절에서 양은석 (2009)에서 논리 $\mathbf{ULw_t}$을 위해 제공된 형태 즉 이들 증명의 변형된 형태를 취하여 체계 **MTL**을 위한 표준 완전성을 제공한다.

우리는 먼저 유한한 혹은 셀 수 있는(countable) 선형적으로 순서 지어진 MTL-대수들이 표준 대수(standard algebra)로 삽입될 수 있다는 것(embeddable)을 보인다. (편의상, 우리는 이러한 대수에 작거나 같은 관계 ≤를 덧붙인다.)

명제 5.1 임의의 유한한 혹은 셀 수 있는 선형적으로 순서 지어진 MTL-대수 **A** = (A, $\leq_A$, ⊤, ⊥, ∧, ∨, *, →)에 대하여, 다음 조건들을 만족하는 셀 수 있게 순서 지어진 X, 이항 연산 ○ 그리고 A로부터 X로의 함수가 있다

(Ⅰ) X는 조밀하게 순서 지어지고(densely ordered), 극대 값 Max, 극소 값 Min을 갖는다.

(Ⅱ) (X, ○, ≤, Max)는 선형적으로 순서지어 진 단조 교환 모노이드이다.

(Ⅲ) ○은 (X, ≤) 위에서 순서 토폴로지(topology)에 관한 한 좌-연속이다.

(Ⅳ) f는 구조 (A, $\leq_A$, ⊤, ⊥, ∧, ∨, *)의 (X, ≤, Max, Min, min, max, ○)으로의 삽입(embedding)이고, 모든 m, n ∈ A에 대하여, f(m → n)은 (X, ≤, Max, Min, max, min, ○)에서

$f(m)$과 $f(n)$의 잔여(residuum)이다.

증명: 먼저 편의상 우리는 A를 거기서 1, 0이 $\top$, $\bot$에 각각 상응하는 극대, 최대 원소인 유한하거나 셀 수 있는(countable) 원소를 갖는 $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$의 부분집합으로 가정한다. 이제

$$X = \{(m, x) : m \in A \setminus \{0\ (= \bot)\} \text{이고 } x \in \mathbf{Q} \cap (0, m]\} \cup \{(0, 0)\}$$

이라고 하자.

$(m, x), (n, y) \in X$에 대하여, 우리는 $\leq$를 다음과 같이 정의한다.

$$(m, x) \leq (n, y) \text{는 } m <_A n \text{이거나 } m =_A n \text{이고 } x \leq y \text{이다.}$$

순서 $\leq$이 극대 값 (1, 1), 극소 값 (0, 0)을 갖는 선형 순서라는 것은 분명하다. 아울러 $\leq$은 다음의 이유로 조밀하다. $(m, x) < (n, y)$이라고 하자. 그렇다면 $m <_A n$이거나 $m =_A n$이고 $x < y$이다. 전자의 경우라면, $(m, x) < (n, y/2) < (n, y)$이다. 그렇지 않다면, $(m, x) < (n, x+y/2) < (n, y)$이다. 따라서 $\leq$이 조밀하기 때문에 (I)이 성립한다.

편의상 우리는 지금부터 $<_A$와 $=_A$에서 첨자 A를 특별히 구별할 필요가 없다면 생략할 것이다. 그렇지만 문맥적으로 우리가 의미하는 것은 분명할 것이다.

이제 $(m, x), (n, y) \in X$에 대하여 다음을 정의하자.

$$(m,x) \circ (n,y) = \begin{cases} \min\{(m,x), (n,y)\} & m*n = \min\{m,n\}\text{이라면} \\ (m * n,\ m * n) & \text{그렇지 않을 경우.} \end{cases}$$

우리는 $\circ$이 (Ⅱ)를 만족한다는 것을 증명한다.

(1) 교환. $\circ$이 교환적이기 때문에 이는 분명하다.

(2) 항등. 우리는 (1, 1)이 항등원이라는 것을 보인다. $(m, x) \leq (1, 1)$이라고 하자. $\top * m = m$이기 때문에, $(1, 1) \circ (m, x) = \min\{(1, 1), (m, x)\} = (m, x)$이다.

(3) 단조성. $\circ$이 교환적이기 때문에, 만약 $(l, x) \leq (m, y)$이라면, 모든 $(n, z) \in X$에 대하여, $(l, x) \circ (n, z) \leq (m, y) \circ (n, z)$를 보이는 것으로 충분하다. 우리는 다음처럼 몇 가지 경우를 구분한다.

● $l * n = l \wedge n$이고 $m * n = m \wedge n$인 경우:

$(l, x) \circ (n, z) = \min\{(l, x), (n, z)\} \leq \min\{(m, y), (n, z)\} \leq (m, y) \circ (n, z)$.

● $l * n = l \wedge n$이고 $m * n \neq m \wedge n$인 경우:

$l * n \leq m * n$은 $\min\{(l, x), (n, z)\} \leq (m * n, m * n) \leq (m, y) \circ (n, z)$을 함의한다.

● $l * n \neq l \wedge n$이고 $m * n = m \wedge n$인 경우:

$l * n < \min\{l, n\} \leq \min\{m, n\} = m * n$이기 때문에, $(l, x) \circ (n, z) \leq (m, y) \circ (n, z)$라는 것이 즉각 따라 나온다.

● $l * n \neq l \wedge n$이고 $m * n \neq m \wedge n$인 경우:

$l * n \leq m * n$이기 때문에, $(l, x) \circ (n, z) \leq (m, y) \circ (n, z)$라는 것이 즉각 따라 나온다.

(4) 결합. 우리는 모든 $(l, x), (m, y), (n, z) \in X$에 대하여,

(A) $(l,x) \circ ((m,y) \circ (n,z)) = (((l,x) \circ (m,y)) \circ (n,z)$.

이의 증명은 Jenei & Montagna (2002)의 [명제3.1]에서의 증명과 유사하다.

우리는 다음으로 (III)을 증명한다. $\circ$의 좌-연속성을 보이기 위하여, 우리는 만약 $\langle(m_i, x_i): i \in \mathbf{N}\rangle$이 $\sup\{(m_i, x_i): i \in \mathbf{N}\} = (m, x)$인 X 원소들의 ($\leq$에 관한 한) 임의의 증가 수열(increasing sequence)이라면, 모든 $(n, y) \in X$에 대하여, $\sup\{(m_i, x_i) \circ (n, y): i \in \mathbf{N}\} = (m, x) \circ (n, y)$이라는 것을 증명한다. 거의 모든 i에 대하여, $m_i = m$이라는 데 주의하자. (그렇지 않다면 $(m, x/2) < (m, x)$이 수열 $\langle(m_i, x_i): i \in \mathbf{N}\rangle$의 상계(upper bound)가 될 것이다.) 수열 $\langle(m_i, x_i): i \in \mathbf{N}\rangle$의 유한한 원소를 제거함으로써, 우리는 모든 i에 대하여 $m_i = m$이고 $x = \sup\{x_i: i \in \mathbf{N}\}$이라고 가정할 수 있다. 이제 우리가 고려해야 할 경우들은 다음이다.

$m * n = m \wedge n$일 경우, $(m, x) \circ (n, y) = \min\{(m, x), (n, y)\}$이고 $(m_i, x_i) \circ (n, y) = \min\{(m_i, x_i) \circ (n, y)$이다. 그리고 좌-연속성은 min의 (좌-)연속성으로부터 따라 나온다. 그렇지 않다면, $(m, x) \circ (n, y) = (m_i, x_i) \circ (n, y) = (m * n, m * n)$이다. 따라서 (III)이 성립한다.

이제 마지막으로 (IV)를 증명한다. 먼저 모든 $m \in A$에 대하여,

$$f(m) = (m, m)$$

이라고 정의하자.

함수 f가 증가이고 따라서 1 대 1이라는 것은 분명하다. f(1)과 f(0)은 $(X, \leq)$의 가장 큰, 가장 작은 원소이다. f(1)은 $\circ$의 항등원이다. 나아가 $f(m) \circ f(n) = f(m * n)$이다. 따라서 f는 부분적으로

순서 지어진 모노이드들의 삽입이다. 이제 남은 것은 모든 l, m, n ∈ A에 대하여, f(l → m)이 ○에 관한 한 f(l)과 f(m)의 잔여라는 것 즉 (i) f(l) ○ f(l → m) ≤ f(m)과 (ii) 만약 f(l) ○ (n, z) ≤ f(m)이라면, (n, z) ≤ f(l → m)임을 증명하는 것이다.

(i). l ≤ m이라고 하자. f(l) ○ f(l → m) = (l, 1) ○ (l → m, l → m) = (l * (l → m), l * (l → m)) ≤ (m, m) = f(m). 나머지 경우는 유사하게 증명된다.

(ii). 대우를 사용해서 우리는 (ii)를 증명한다. f(l → m) < (n, z) 즉 (l → m, l → m) < (n, z)이라고 하자. l → m이 A에서 l과 m의 잔여이기 때문에, m < l * n이다. 따라서 (m, m) < (l, l) ○ (n, z)이다. □

명제 5.2 모든 셀 수 있는 선형적으로 순서 지어진 MTL-대수는 표준 대수로 삽입될 수 있다.

증명: 이의 증명은 예네이와 몬테그나 Jenei & Montagna (2002)의 [정리3.2]의 증명과 유사하다. □

정리 5.3 (강한 표준 완전성) **MTL**에 대하여, 다음은 동치이다:

(1) $T \vdash_{\mathbf{MTL}} \phi$.

(2) 모든 표준 **MTL**-대수와 값 매김 v에 대하여, ψ ∈ T에 대하여 v(ψ) = 1이라면, v(ϕ) = 1이다.

Proof: (1)로부터 (2)는 정의로부터 따라 나온다. 우리는 (2)로부터 (1)을 증명한다. ϕ가 $T \nvdash_{\mathbf{MTL}} \phi$인 식이고, **A**가 선형적으로 순서 지어진 **MTL**-대수이고, v가 모든 ψ ∈ T에 대하여 v(ψ) = ⊤이고 v(ϕ) < ⊤인 값 매김이라고 하자. 이제 f'을 **A**의 표준 **MTL**-

대수로의 삽입이라고 하자. 그렇다면 f' ○ v 는 f' ○ v(ψ) = 1이지만 f' ○ v(ϕ) < 1인 표준 **MTL**-대수로의 값 매김이다. □

언급 5.4 명제 5.1의 증명에서 ○, f와 같은 것들의 정의는 Jenei & Montagna (2002)의 정리 3.1에서의 그것들과 다르다. 이는 여기서 제시된 **MTL**을 위한 표준 완전성 증명이 예네이와 몬테그나의 증명과 다른 새로운 표준 완전성 증명이라는 것을 보장한다.

6. 맺는 말

우리는 이 논문에서 양은석 (2009) 논문에서 논리 **ULw**$_t$를 위하여 제공된 표준 완전성 증명에 문제가 있다는 점을 보였다. 그리고 같은 논문에서 제공된 표준 완전성 증명이 예네이와 몬테그나에 의해 제공된 모노이드 t-규범 논리 **MTL**을 위한 새로운 표준 완전성 증명에 활용될 수 있다는 점을 입증하였다.

우리는 약화 없는 유니놈들을 의미론으로 갖는 논리들에 양은석 (2009) 논문에서 제시된 표준 완전성 증명 방식이 활용될 수 있다는 것을 입증하지 못하였다. 이는 앞으로 연구될 과제이다.

참고 문헌

양은석 (2009), "On the standard completeness of an axiomatic extension of the uninorm logic", 『논리연구』, 12(1), pp. 1-23.

Esteva, F., and Godo, L. (2001), "Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continous t-norms", *Fuzzy Sets and Systems*, 124, pp. 271-288.

Hájek, P. (1998), *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Amsterdam, Kluwer.

Jenei, S. and Montagna, F. (2002), "A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL", *Studia Logica*, 70, pp. 183-192.

Metcalfe, G. and Montagna, F. (2007), "Substructural Fuzzy Logics", *Journal of Symbolic Logic*, 72, pp. 834-864.

Novak, V. (1990), "On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic Ⅰ, Ⅱ", *Kybernetika*, 26, pp. 47-66.

전북대학교 철학과, 기록관리학과

Department of Philosophy & Records Management, Chonbuk National University

eunsyang@jbnu.ac.kr

Standard Completeness for **MTL**

Eunsuk Yang

This paper verifies the following two: First, I verify the standard completeness proof for the system **UL**w$_{\mathbf{t}}$ is not correct in the sense that **t**-weakening uninorms are t-norms, but not weakening-free uninorms. Second, I verify that the proof for **UL**w$_{\mathbf{t}}$ can be used for the system **MTL**. That is, I provide a new standard completeness proof for it.

Key Words: Fuzzy logic, Monoid, t-norm, **MTL**.