논리연구 14-3(2011) pp. 137～175

양의 비율로서 실수* **

박 준 용

【요약문】 밥 헤일은 최근 추상화 원리에 기초한 실수이론을 제안하였다. 그 이론에서 실수는 양의 비율로 간주되고, 양의 비율의 동일성은 유독소스에게서 유래된 비율 원리에 의해 설명된다. 그가 실수를 양의 비율로 정의하는 이유는 산수 개념의 정의는 그런 개념의 보편적 적용 가능성에 알맞게 이루어져야 한다는 프레게의 요구를 그가 만족시키려 하기 때문이다. 이 글에서 나는 실수 적용에 대한 헤일의 설명이 왜 프레게 제한을 만족시키기 힘든지 보이고, 대안이 될 만한 설명을 제안한다. 나는 먼저 양 개념에 대한 그의 설명과 양의 영역에 관한 그의 약정 사이에 어떤 간격이 있고, 이 때문에 실수 적용에 대한 그의 설명에 어려움이 생긴다는 것을 보인다. 다음으로 나는 어떤 종류의 양들에나 적용될 수 있는 새로운 비율 원리를 제안하고, 그 원리는 양의 비율로서 실수들이 보편적으로 적용가능한 이유를 적합하게 설명해 준다고 주장한다. 마지막으로 나는 양의 측정 절차를 검토한 후, 실수의 성공적 적용을 위해 우리가 전제해야 할 원리들을 제시한다.

【주요어】 논리주의, 프레게, 헤일, 실수, 양, 양의 비율, 측정

* 접수일자: 2011.9.28. 심사 및 수정완료일: 2011.10.6. 게재확정일: 2011.10.10.

** 이 논문은 2009년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF- 2009-353-A00017). 이 글을 읽고 가치있는 논평을 해준 익명의 세 심사위원께 감사한다.

1. 들어가는 말

수는 관찰 불가능한 추상적 존재이지만 일상생활이나 과학 연구에서 없어서는 안 될 만큼 폭넓게 사용되고 있다. 수의 추상성과 보편적 적용 가능성을 동시에 설명하고자 한 것이 프레게의 논리주의였다. 그는 수의 추상성은 수가 논리적 대상이라는 데서 유래한다고 생각하였다. 그리고 그는 산수가 보편적으로 적용가능한 이유는 바로 산수가 갖는 논리적 성격에서 유래한다고 생각하였다. 하지만 잘 알려진 것처럼 그가 수를 정의하기 위해 의존했던 외연 개념은 모순적이라는 사실이 알려졌고, 그는 자신의 논리주의를 포기하였다.

헤일과 라이트는 프레게의 논리주의 프로그램은 외연 개념에 의지하지 않아도 여전히 유지될 수 있다고 생각하였다. 그들은 프레게가 『산수의 기초』 64절에서 제시했던 추상 대상의 도입 방안에 의지하려 한다. 그들은 수들이 우리 정신과 독립해서 존재하는 추상 대상들이고, 추상 대상으로서 수들에 대한 지식은 수들의 동일성에 대한 논리적 설명으로서

$$\Sigma\alpha = \Sigma\beta \leftrightarrow \alpha \approx \beta$$[1)]

같은 형식의 수 추상화 원리 및 고단계 논리학만으로 충분히 정당화할 수 있다고 생각한다. 그들은 프레게가 기수들의 동일성 기준으로 제시한 흄의 원리

$$NxFx = NxGx \leftrightarrow \exists R(F \ 1\text{-}1_R \ G)$$[2)]

---

1) 여기서 “Σ”는 추상화 연산자를, “α”와 “β”는 추상화의 기초가 되는 항들 — 대상들이나 개념들 혹은 관계들 — 을, 그리고 “≈”는 그런 항들 사이에 성립하는 동치 관계를 나타낸다.

를 토대로 삼을 때, 적어도 수학의 가장 기초적 이론으로서 자연수론에 관한 한 프레게의 논리주의는 여전히 정당하다고 주장하였다. 이런 주장이 많은 논란을 낳기는 하였지만, 최근 수학 철학의 한 주요 흐름을 형성하여 온 것은 부인할 수 없다.

추상화 원리에 근거한 논리주의는 수학의 다른 영역에도 확장될 수 있는가 하는 것은 라이트와 헤일의 프로그램의 발전을 가늠할 수 있는 주요 문제였다. 지난 10여 년간 이 물음에 긍정적 답을 제시하려는 두 방향의 시도가 있었다. 샤피로는 표준적 집합론 내의 실수 구성 절차를 모방하여 일련의 추상화 원리들을 제시하고, 최종으로 데데킨트나 칸토르의 실수 정의 방법을 의지해서 실수들을 구성해 내고자 하였다.[3] 이 경우 실수들은 단지 이미 주어진 수들로부터 논리적으로 추상화한 대상들로 간주될 것이다. 반면 헤일은 실수들을 임의의 양이 다른 양에 대해 갖는 비율로 이해하고, 유독소스에게서 유래하는 비율 동일성 원리를 실수 추상화 원리로 간주한다. 물론 그는 충분히 많은 실수들을 얻기 위해 데데킨트의 실수 구성 절차를 이용한 컷 추상화 원리를 이용하긴 하지만, 이 원리 자체는 실수를 직접 얻기 위한 원리가 아니라 실수들을 정의하기 위한 영역으로서 완전한 양의 영역을 얻기 위한 원리이다.

헤일은 왜 실수를 양들 사이의 비율로 간주하려 하는가? 이는 무엇보다 수의 적용에 관한 프레게 자신의 생각과 관련이 있다. 과학에서나 일상생활에서 우리는 수들을 사용한다. 프레게는 수학의 등식이나 부등식에 등장하는 그 수들이 우리가 과학에서 혹은 일상생활에서 사용하는 그 수들과 다른 것이 아니라고 생각하였다. 이에 따라 수들이 무엇인지 설명하는 일은 언제나 두 과제를 갖게 된다. 하나는 수학 이론을 전개하기에 충분할 만큼 수들의 존재 및

2) 여기서 왼편의 "NxFx"는 "F인 대상들의 개수", 오른편의 "F $1\text{-}1_R$ G"는 "F인 대상들을 G인 대상들과 1-1로 짝지을 수 있다"에 해당하는 표현이다.

3) Shapiro (2000) 참조.

인식을 정당화하는 일이다. 다른 하나는 그런 수들이 왜 과학이나 일상생활에서 널리 적용되는지 해명하는 일이다. 이 때문에 그는 자연수론의 원리들을 충족시킬 만큼 무한히 많은 자연수들의 존재를 논증하고 그런 존재를 논리적 수단만으로 정당화하려 했을 뿐 아니라, 자연수들이 바로 우리가 임의의 개념 아래 속하는 대상들의 개수로 주어진다는 것을 보이고자 하였다. 그리고 — 잘 알려져 있지 않지만 — 그는 실수들이 실수 해석학을 전개하기에 충분할 만큼 셀 수 없이 많이 존재한다는 것을 논증하고 그런 존재에 대한 인식이 논리적 수단만으로 가능하다는 입증하려 했을 뿐 아니라, 실수들이 바로 우리가 임의의 양이 다른 양에 대해 갖는 비율로 주어진다는 것을 보이고자 하였다.

헤일의 실수 이론의 동기는 무엇보다 이런 프레게의 생각을 구체화하는 데 있었다. 그렇다면 헤일의 실수 이론은 두 기초적 요건을 충족시켜야 할 것이다. 첫째로 양이 무엇인지, 양의 비율이 무엇인지에 대해 실제 사용에 알맞은 설명이 주어져야 할 것이다. 둘째로 실수 해석학의 전개에 충분할 만큼 실수들의 정의역으로서 완전 배열체를 이루는 양들의 영역이 존재한다는 것, 그리고 그런 영역의 양들 사이의 비율로서 실수들이 존재한다는 것을 논리적으로 정당화할 수 있어야 할 것이다. 우리는 전자의 요건을 실수 설명의 실질적 적합 조건, 후자의 요건을 순수 이론적 요건으로 간주할 수 있다. 헤일은 최근 독자적인 양이론을 발전시켰고 이에 근거해서 두 요건이 만족 가능하다는 것을 보이려 하였다. 하지만 나의 견해로는 헤일의 양이론에서는 이론적 요건을 만족시키는 데 큰 어려움이 없지만,[4] 그의 철학적 동기에 맞게 실질적인 적합 조건

4) 헤일의 실수 추상화 원리 중 컷원리의 이론적 성격에 관해 많은 논란이 있었다. 특히 그 원리가 수학적 대상의 수를 지나치게 팽창시킴으로써 이론 전체의 안전성을 해칠 수 있다는 우려가 제기되었다. Cook (2002) 및 Hale (2000a) 참조. 그러나 최근 샤피로는 헤일의 컷원리의 안전성에 큰 난점이

을 만족시키기는 쉽지 않다고 여겨진다.

이 글은 실수 적용에 대한 헤일의 설명이 어떤 난점에 마주치는지 해명하고, 그런 난점을 극복할 방안을 모색하는 데 목적이 있다. 먼저 나는 2절에서 그의 양 추상화 방법, 양의 영역에 대한 공리적 규정 및 실수 존재의 정당화 방법을 차례대로 살펴본다. 3절에서 나는 그의 실수 적용의 설명과 그 난점을 설명하고, 그가 마주친 난점이 그의 양 추상화 방법과 양의 영역에 대한 규정 사이의 간격에 기인한다고 진단한다. 4절에서 나는 헤일의 난점을 극복할 방안을 제안한다. 나는 양이 갖추어야 할 조건을 양이 실수를 가지기 위한 조건과 동일시하고, 모든 종류의 양들에 적용할 수 있는 실수 적용 원리를 제안한 후, 실수 적용을 지배하는 일반적 원리들을 구체화한다. 이를 바탕으로 헤일의 난점이 어떻게 해결될 수 있는지 설명한다.

2. 헤일의 양이론

헤일의 양이론은 크게 두 부분으로 나누어진다.[5] 하나는 양이 일반적으로 무엇인지 설명하는 것이고, 다른 하나는 완전 배열체를 이루는 양의 영역이 무엇인지 설명하는 것이다. 먼저 그의 일반적 양 개념에 대한 설명을 살펴보자.

2.1. 양의 추상화

양에 대한 헤일의 설명에서 가장 주목할 점은 무엇보다 그가 양

없다고 논의한다. Shapiro (2011), 4절 참조.

5) 양에 관한 헤일 견해의 세부 사항은 Hale (2000), Hale (2002)과 Hale (2005) 사이에서 조금 변화하였다. 나는 여기서 가장 최근의 견해를 중심으로 논의한다.

을 물리적 대상들이 갖는 속성이나 관계로 이해하는 것이 아니라, 추상 대상으로 이해한다는 점이다. 프레게가『산수의 기초』64절에서 방향들을 평행한 선들을 기초로 도입되는 추상 대상들로 간주한 것처럼, 헤일은 예컨대 길이들 같은 양들을 똑같이 긴 대상들을 기초로 도입되는 추상 대상들로 간주한다. 헤일에 따를 때 양들을 추상 대상으로 간주하기 위해서는 적어도 두 조건이 만족되어야 한다.

첫째로 어떤 양적 동치 관계가 주어져야 하고 그런 관계의 항으로서 양을 갖는 대상들이 주어져야 한다. 예컨대 길이들을 도입하려면 먼저 "x는 y와 똑같이 길다" 같은 양적 동치 관계가 주어져야 하고, 이 관계의 항들로서 길이를 갖는 대상들이 주어져야 한다. 양적 동치 관계의 항이 되는 대상들 전체, 즉 그 관계의 영역을 양 추상화의 토대라고 하자.

둘째로 양 추상화의 토대가 되는 대상들 사이에 성립하는 양 동치 관계를 양들의 동일성과 연결시켜 주는 양 추상화 원리가 주어져야 한다. 양 추상화 원리는 예컨대 어떤 두 대상 *a*와 *b*에 대해 "x는 y와 똑같이 길다"는 양 동치 관계가 성립한다는 것이 "*a*가 갖는 그 길이 = *b*가 갖는 그 길이"라는 길이 동일성 문장이 성립한다는 것과 동치임을 말해 준다.

*a*가 갖는 그 길이 = *b*가 갖는 그 길이 ↔ *a*는 *b*와 똑같이 길다.

이처럼 양을 양적 동치 관계로부터 추상된 대상으로 이해하려할 때, 자연스럽게 두 의문이 생긴다. 첫째로 서로 다른 양적 동치 관계에 의해 주어진 양들은 같은 것으로 간주될 수도 있는가? 이 물음은 길이나 질량처럼 구체적 대상들 사이의 양적 관계에 의해 주어지는 양들에 대해서는 크게 문제가 되지 않는다고 여겨질 것이다. 하지만 헤일은 양적 동치 관계가 언제나 구체적 대상들 사이

의 관계여야 한다고 생각하지 않음을 주목할 필요가 있다. 예컨대 샤피로가 했듯이 자연수들 사이의 동치 관계에 의해 정수들을 도입한다면,[6] 문제의 동치 관계가 양적 관계인지 아닌지, 그리고 추상 대상으로서 정수 3은 추상화의 토대로서 자연수 3과 같은지 다른지 묻는 것은 아주 자연스럽다.

둘째로 양적 동치 관계에 의해 주어질 수 있으면 어느 것이든 다 양으로 간주될 수 있는가? 이 물음은 길이나 질량처럼 양의 크기를 정확히 결정할 수 있는 경우에는 크게 문제되지 않는다고 여길지 모른다. 예컨대 우리는 임의의 막대 *a*가 얼마나 긴지 알기 위해 자를 이용해서 막대의 길이를 잴 수 있으므로, “*a*가 갖는 그 길이”가 정확히 어느 정도의 양을 말하는지 쉽게 대답할 수 있을 것이다. 하지만 “x는 y와 똑같이 관대하다”는 동치 관계는 양적 동치 관계인지 아닌지, “x의 그 관대함” 같은 단칭 용어가 어떤 양을 나타내는지 아닌지 어떻게 결정해야 하는가?

이런 물음은 양 추상화 원리만으로 양을 설명하기에 충분하지 않음을 보여준다. 이 때문에 헤일은 양적 동치 관계를 포함해서 일반적으로 양적 관계가 무엇을 말하는지 더 자세히 규정한다. 그는 양적 관계를 “x는 y와 똑같이 길다”, “x는 y보다 더 길다” 같이 대상들이 갖는 양을 단순히 비교하는 데 사용되는 양적 관계를 “x는 y보다 두 배 더 길다”, “x는 y보다 반만큼 길다” 같이 대상들이 갖는 양의 크기를 구체적으로 비교하는 데 사용되는 양적 관계와 구별한다. 단순 양적 관계들은 양의 종류를 구분하는 데서 중요한 역할을 한다.

첫째로 헤일에 따르면 어떤 종류의 양들에 대해서든지 그런 양의 동일성을 설명해 주는 양적 동치 관계만 아니라 다른 단순 양 비교 관계들이 함께 주어진다. 예컨대 “x는 y와 똑같이 길다”는 관

[6] Shapiro (2000), 2절 참조.

계의 영역 내의 대상들에 대해서는 “x는 y보다 더 길다”나 “x는 보다 더 짧다” 같은 관계가 성립하는지 결정될 수 있다. 일반적으로 말해 어떤 양적 동치 관계 $R^{=}$이 주어져 있고 이 관계에 의해 추상된 양들이 도입될 때, $R^{=}$과 똑같은 관계 영역을 갖는 단순 양적 관계들 $R^{>}$이나 $R^{<}$ 역시 주어진다. $R^{>}$이나 $R^{<}$은 $R^{=}$과 달리 반대칭 이행 관계이다. 중요한 점은 이처럼 같은 종류의 양과 관련된 단순 양적 관계들 $R^{=}$과 $R^{>}$ 그리고 $R^{<}$이 주어질 때, 관계 영역 내의 임의의 어느 두 대상 *a*, *b*에 대해서든지 셋 중 정확히 한 관계가 성립한다는 것이다. 이에 따라 단순 양적 관계들이 주어지면 관계 영역 내의 대상들은 일정한 순서로 배열될 수 있다.

둘째로 헤일에 따르면 양적 동치 관계 사이의 함축 관계에 따라 임의의 두 양이 같은 종류의 양인지 아닌지 결정할 수 있다. 종류 Φ의 양들을 도입하는 데 사용되는 동치 관계는 “$x \approx_{\phi} y$”에 의해, 종류 Ψ의 양들을 도입하는 데 사용되는 동치 관계는 “$x \approx_{\psi} y$”에 의해 표현된다고 하자. 그러면 임의의 두 대상 *a*, *b*에 대해 “$a \approx_{\phi} b$”가 성립할 경우 언제나 “$a \approx_{\psi} b$”가 성립한다면, 종류 Φ의 양들은 종류 Ψ 아래 속하는 양들로 간주할 수 있을 것이다. 헤일은 동치 관계 $\approx_{\phi}$와 $\approx_{\psi}$ 중 하나가 다른 하나를 언제나 함축한다면, 다시 말해

$$(a \approx_{\phi} b \rightarrow a \approx_{\psi} b) \vee (a \approx_{\psi} b \rightarrow a \approx_{\phi} b)$$

가 모든 *a*, *b*에 대해 성립한다면, Φ들과 Ψ들은 같은 종류의 양들이라고 규정한다. 이에 따라 두 동치 관계 $\approx_{\phi}$와 $\approx_{\psi}$ 중 어느 것도 다른 것을 함축하지 않는다면, 그것에 의해 도입되는 양들도 다른 종류의 양으로 간주될 것이다. 만약 같은 종류에 속하지 않는 양들은 서로 같은 양으로 간주될 수 없다면,[7] 앞의 규정은 추상 대상으로서 양의 동일성에 대한 충분한 설명을 제공할 것이다.

이런 설명에 근거할 때 서로 다른 동치 관계에 의해 주어지는 양들 사이의 동일성 문제는 해결되는 것 같다. 반면 아직 이런 설명은 관대함 같이 양으로 간주하기 힘든 많은 경우는 배제하기 힘들어 보인다. 헤일은 이런 경우들을 질량이나 길이 같은 양들과 구별하기 위한 요건을 제시한다. 질량이나 길이 같은 양들은 관대함, 엄격함 등의 심리적 특징들과 중요한 차이를 갖고 있다. 길이를 갖는 막대들이 주어져 있다고 하자. 우리는 임의의 두 막대 a와 b를 나란히 이을 수 있고, 그 경우 이어 얻은 전체 대상 c 역시 길이를 갖는 것으로 간주할 수 있고 c의 길이를 다른 막대들의 길이와 비교할 수 있다. 일반적으로 말해, Φ인 대상들이 어떤 양적 동치 관계에 의해 주어진 양들이라면, 그런 양들을 갖는 임의의 두 대상 a와 b에 대해서는 그 둘을 어떤 식으로 결합하여 다른 대상 c를 얻을 수 있고, c 역시 Φ인 어떤 양을 가질 수 있을 것이다. 나아가 이 경우 대상 c는 a와 b보다 반드시 더 큰 양을 가질 것이다. 반면 우리는 두 사람이 있을 때 누가 더 관대한지 비교할 수는 있겠지만, 두 사람을 결합하여 새로운 사람을 얻을 수는 없을 것이고 — 설령 그런 일이 가능하다 해도 — 다른 사람들과 누가 더 관대한지 비교할 수도 없을 것이다. 이 때문에 헤일은 양적 동치 관계에 의해 주어진 추상 대상들을 엄격한 뜻의 양으로 간주할 수 있

7) 헤일이 이 조건을 명시하지는 않지만 받아들일 것 같다. 그는 어떤 개념이 적용 기준만 아니라 동일성 기준도 가지고 있다면 그것을 종류 개념(sortal concept)으로 간주한다. 예컨대 임의의 양이 예컨대 길이인지 아닌지 결정할 수 있고 길이에 대한 동일성 기준이 주어져 있다면, “길이” 개념은 종류 개념일 것이다. 헤일은 이런 뜻에서 그의 추상화 방법에 의해 도입되는 양들은 두 조건을 모두 갖출 수 있고 그래서 종류 개념으로 간주할 수 있다고 생각한다. 그렇다면 그가 서로 다른 종류 아래 속하는 대상들 사이의 동일성 문제 — 즉 시저 문제 — 를 해결하기 위해 제안한 방안, 즉 서로 다른 범주 아래 속하는 대상들은 서로 다른 것으로 간주해야 한다는 방안은 양들의 경우에도 적용되어야 할 것이다. Hale&Wright (2001), “To Bury Caesar”, 박준용 (2009) 참조.

으려면, 다음 조건이 충족되어야 한다고 생각한다.

> 양적 관계 R의 관계 영역 내의 임의의 두 대상 a, b에 대해, a와 b의 결합 $a \bigcirc b$가 존재할 수 있고, 만약 $a \bigcirc b$가 존재한다면, 반드시 $a \bigcirc b \ \mathrm{R}^{>} \ a$.[8)]

이제 헤일의 양에 대한 설명을 요약해 보자. 양들은 동치 관계에 의해 주어지는 추상 대상이다. 이런 식으로 도입된 임의의 추상 대상을 양으로 간주할 수 있으려면, 추상화의 토대가 되는 대상들에 대해 다음 두 조건이 충족되어야 한다. 첫째로 그런 대상들은 양적 동치 관계 및 단순 양 비교 관계에 의해 일정한 순서로 배열될 수 있어야 한다. 둘째로 같은 종류의 양을 갖는 대상들은 서로 결합되어 같은 종류의 양을 갖는 대상이 될 수 있고, 그 경우 새로운 대상은 원래의 대상보다 반드시 더 큰 양을 갖는다.

2.2. 양의 영역과 양의 비율

헤일의 양이론의 둘째 부분은 양의 영역에 관한 설명이다. 헤일 이론에서 양의 영역 개념은 두 역할을 한다. 첫째로 헤일은 실수를 프레게처럼 양의 비율로 간주한다. 양의 비율이 무엇인지 설명하기 위해서는 임의의 양이 비율을 갖기 위한 조건을 설명해야 할 것이다. 우리는 이처럼 양들이 비율을 갖기 위한 조건을 비율로서 실수의 적용 조건으로 간주할 수 있다. 헤일은 양들이 어떤 조건을 충족시키는지에 따라 양들이 속하는 영역을 분류하고, 비율을 갖기에 필요하고도 충분한 조건을 갖춘 양들의 영역을 표준영역이라고 한다.[9)] 둘째로 헤일은 양의 비율 역시 임의의 두[10)] 양의 영역에 속

---

8) 이 조건을 양상 연산자를 사용해서 정식화하면, $\forall x \forall y[\Diamond \exists z(x \bigcirc y=z)$ & $(\exists z(x \bigcirc y=z) \ \Box\!\!\rightarrow \ x©y \ R^{>} x)]$.

9) 헤일의 이런 생각은 하워드 슈타인에게서 유래한다. Hale (2000), p. 107 및

하는 두 쌍의 양들 사이에 성립하는 어떤 동치 관계에 도입한다. 달리 말해 양의 비율들 — 즉 실수들 — 은 임의의 두 쌍의 양들 사이의 동치 관계에 의해 그 동일성이 성립하는 추상 대상들이다. 그런데 헤일은 실수 해석학을 전개시킬 만큼 충분히 많은 실수들의 존재를 입증하려 하며, 이를 위해서는 먼저 추상화의 토대가 되기에 필요하고도 충분히 많은 양들의 영역이 주어져야 한다. 우리는 그런 조건을 실수의 존재 조건으로 간주할 수 있는데, 헤일은 그런 조건을 만족하는 양들의 영역을 완전영역이라고 한다.

헤일은 표준영역과 완전영역의 특징을 공리적 방식으로 규정한다. 어떤 양들이 표준영역을 형성하려면 다음 조건들이 만족되어야 한다.

(1) 영역 Q는 합 연산 $\oplus$ 아래 닫혀 있다: Q의 모든 두 양 p, q에 대해, $p \oplus q$가 존재하고, $p \oplus q$ 역시 Q의 양이다.
(2) 교환법칙: Q의 모든 두 양 p, q에 대해, $p \oplus q = q \oplus p$.
(3) 결합법칙: Q의 모든 세 양 p, q, r에 대해, $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$.
(4) 삼분법: Q의 모든 두 양 p, q에 대해, $p = q$, $p > q$, $p < q$ 중 정확히 하나가 성립한다.
(5) 아르키메데스 원리: Q의 모든 두 양 p, q에 대해, $m \otimes p > q$인 양의 정수 m이 존재한다.

여기서 합 연산 $\oplus$와 관련하여 주의할 점이 둘 있다. 첫째로 $\oplus$는 양 자체에 대해 적용되는 연산이라는 점이다. 이 연산은 앞에서 논의한 양을 갖는 대상들의 결합 ○와 구별되어야 하고, 수에만 특별히 사용되는 더하기 연산 +와도 구별되어야 한다. 이 점은 양들 자체에 대한 비교 관계로서 $>$ 와 $<$ 에 대해서도 유사하게 성립한다. 이 관계는 양을 갖는 대상들 사이에 성립하는 단순 양적 비

Stein (1990), 2절 참조.
10) 이 두 양의 영역은 서로 다르지 않아도 된다.

교 관계나 특별히 수들에 대해서만 성립하는 비교 관계와 구분되어야 한다.

둘째로 아르키메데스 원리를 표현하기 위해 필요한 양의 정수곱 연산 ⊗은 합 연산에 의해 아래와 같이 귀납적으로 정의된다.

> $1 \otimes p = p$. $(m+1) \otimes p = (m \otimes p) \oplus p$.
> [아래 논의에서는 "$m \otimes p$"를 간단히 "mp"로 적을 것이다.]

아르키메데스 원리가 말하는 바는 우리 논의를 위해 중요하다. 첫째로 그 원리가 성립하는 영역 Q의 어느 양 q에 대해서든지 그것보다 더 큰 양 mp가 존재해야 하고, 조건 (1)에 따라 mp는 Q의 양이어야 한다. 이에 따라 표준영역의 양들은 무한히 많이 존재해야 한다는 결론이 따라 나온다. 둘째로 그 원리가 성립하는 영역 Q의 어느 양 q든지 그것보다 더 큰 양이 존재하므로, 영역 Q의 특정 양들은 한정 없이 큰 양일 수는 없다. 그러므로 표준영역의 양들은 모두 한정된 크기를 갖는다는 사실이 따라 나온다.

헤일은 표준영역이 주어질 때 그 영역의 양들에 대해 비율 동일성 원리를 적용할 수 있다고 한다. 그는 유독소스에게서 유래한 것으로 알려진 비율 동일성에 관한 설명을 비율 추상화 원리로 채택한다. 두 표준 양의 영역 Q_1과 Q_2가 주어져 있고, Q_1의 임의의 두 양 p, q 및 Q_2의 임의의 두 양 r과 s가 주어져 있다고 하자. 이 경우 임의의 두 양의 정수 m과 n에 대해, q에 대한 p의 비율이 s에 대한 r의 비율과 같은 경우는 바로 다음 세 경우 중 하나이다.

> (i) mp가 nq보다 더 큰 경우 mr이 ns보다 더 크고, 그 역도 성립한다.
> (ii) mp가 nq와 같은 경우 mr이 ns와 같고, 그 역도 성립한다.
> (iii) mp가 nq보다 더 작은 경우 mr이 ns보다 더 작고, 그 역도 성립한다.

우리가 이 세 경우 중 적어도 한 경우가 성립한다는 것을 간단히 "$mp \overset{>}{\underset{<}{=}} nq \leftrightarrow mr \overset{>}{\underset{<}{=}} ns$"로, 양의 정수들의 영역을 "$Z^{+}$"로, 그리고 "$q$에 대한 p의 비율"을 "***ratio***(p, q)"로 표현하면, 비율 추상화 원리는 아래와 같이 표현된다.

> * $\forall p, q \in Q_1 \forall r, s \in Q_2[\boldsymbol{ratio}(p, q) = \boldsymbol{ratio}(r, s) \leftrightarrow \forall m,n \in Z^{+}(mp \overset{>}{\underset{<}{=}} nq \leftrightarrow mr \overset{>}{\underset{<}{=}} ns)]$.

이 원리를 간단히 "비례원리"라고 부르자.[11] 이 원리가 적용되는 양의 영역에 관해 두 사실을 지적할 필요가 있다. 하나는 Q_1과 Q_2는 같은 영역일 수도 있다는 것이다. 예컨대 질량이 표준영역을 형성한다면, 우리는 임의의 두 질량 사이의 비율은 다른 임의의 두 질량 사이의 비율과 비교할 수 있다. 둘째로 Q_1과 Q_2이 서로 다른 종류의 양들이 속하는 영역이라면, Q_1과 Q_2의 양들은 서로 비교될 수 없을 것이다. 하지만 그 경우에도 우리는 Q_1과 Q_2의 양들이 갖는 비율들은 서로 비교할 수 있다. 예컨대 길이와 질량이 모두 표준영역을 형성한다면, 길이들과 질량들은 서로 비교할 수 없지만, 그것들이 갖는 비율은 서로 비교할 수 있다.

헤일은 프레게를 따라 비례원리에 의해 설명된 양의 비율들을 실수로 간주한다. 하지만 두 표준영역에만 추상화 원리를 적용할 경우, (양의)[12] 실수 전체에 해당하는 비율들은 얻을 수 없고 단지 (양의) 유리수인 실수들에 해당하는 비율들만 얻을 수 있을 뿐이다. 이 때문에 실수 전체에 해당하는 비율들을 얻기 위해서는 그에 알맞은 양의 영역이 어떤 것인지 규정할 필요가 있다. 헤일은 표준영

---

11) 이 원리의 오른편 정의항이 문제되는 양의 크기들 사이에 똑같은 비례관계가 성립한다는 것을 말한다는 점에서, 나는 "비례원리"라는 말을 선택했다.

12) "양의 정수", "양의 유리수", "양의 실수" 등의 말에서 "양의"(positive)란 말은 "음의"(negative)에 대비되는 말이다.

역을 형성하는 양들이 실수 전체를 얻기에 충분한 양의 영역을 형성하기 위해서는 다음 두 조건을 더 만족되어야 한다고 규정한다.

(6) 공약 조건: Φ에 속하는 모든 양 a, b, c에 대해, a의 b에 대한 비율 = q의 c에 대한 비율이 되는 Φ의 어떤 양 q가 존재한다.
(7) 최소상한 조건: Φ에 속하는 적어도 하나의 양이 속성 P를 가질 때, P가 상한을 갖는다면, P는 최소 상한도 갖는다.

헤일은 표준영역의 양들이 이 두 조건까지 모두 충족할 경우 완전영역을 형성한다고 한다. 만약 완전영역이 적어도 하나 존재한다면, 비례원리를 그 영역에 적용하여 실수 전체를 얻을 수 있을 것이다.

여기서 우리는 양의 영역에 대한 공리적 특징 규정은 그런 영역의 존재를 입증한 것이 아님을 주목할 필요가 있다. 지금까지 실제로 이루어진 일은 양의 영역 Q가 (1)-(7)의 조건을 모두 만족할 경우, Q는 완전영역을 형성한다고 규정한 것일 뿐이다. 그러므로 실수 전체의 존재를 입증하려면 (1)-(7)의 조건을 모두 만족하는 영역이 존재한다는 것을 입증해야 한다. 헤일은 이와 관련해서 두 사실에 주목한다.

첫째는 구체적 대상들 사이의 양적 동치 관계에 의해 주어지는 물리량들은 완전영역을 형성할 수 없으리라는 것이다. 앞에서 언급했듯이 헤일의 양 추상화 방법에서는 어느 양 q든지 그것을 갖는 어떤 대상 a가 갖는 양으로 주어진다. 이는 추상된 대상으로서 양의 존재는 언제나 추상화의 토대가 되는 대상의 존재에 의존한다는 것을 말해주는 것으로 보인다. 그렇다면 물리적 대상들이 유한하게 많은 한 그런 대상들을 추상화의 토대로 삼아 얻는 양들도 기껏해야 유한하게 많을 뿐이라는 사실이 따라 나오는 것 같다. 그런데 앞에서 본대로 어떤 양들이 표준영역을 형성하려면, 그것들은 무한히 많이 있어야 한다. 완전영역은 표준영역이므로, 완전영역에

대해서도 같은 사실이 성립한다. 그러므로 물리적 대상들의 수가 유한하다면, 물리량들은 완전영역을 형성하지 못할 것이고 물리량들을 기초로 완전영역의 존재를 입증하기는 불가능할 것이다.

둘째로 앞에 지적한대로 헤일은 반드시 구체적 대상들만 양 추상화의 토대로 간주한 것은 아니다. 그의 양 추상화 방법에 따를 때 수들 자체를 양 추상화의 토대로 간주하는 데 문제가 없다. 왜냐하면 예컨대 정수들은 자연수들 사이의 양적 동치 관계에 의해 주어질 수 있기 때문이다. 그렇다면 우리는 정수들이 (1)-(5)의 조건들을 만족시킬 때, 표준영역을 형성하는 것으로 간주할 수 있을 것이다. 그런데 우리는 이미 익숙한 양의 정수들의 성질들을 고려할 때 (1)-(5)의 조건들이 만족된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 적어도 양의 정수들이 존재한다는 것을 입증할 수 있다면, 우리는 표준영역의 존재를 입증하게 될 것이다.

여기서 헤일은 프레게가 이미 고단계 논리학 내에서 흄의 원리로부터 무한히 많은 자연수들이 존재한다는 것을 증명했다는 사실을 주목한다.[13] 그러므로 프레게의 결과에 의존할 때 (양의) 정수영역의 존재를 입증하는 것은 어려운 일이 아니다. 남는 문제는 이런 영역의 대상들로부터 어떻게 완전영역을 이루는 양들을 얻는가 하는 것이다. 여기서 헤일은 데데킨트의 실수 구성 절차를 모방하여 새로운 추상화 원리를 도입한다. 먼저 그는 (양의) 정수들에 대해 비례원리를 적용시켜, (양의) 유리수들에 해당하는 비율들을 쉽게 얻는다. 이 비율들은 유리수들이 갖는 모든 속성을 가질 것이므로, 최소 상한의 조건에 해당하는 그런 속성들도 가질 것이다.

헤일은 이제 데데킨트의 작업을 통해 익히 알려진 실수 도입 방법을 이용한다. 먼저 그는 양의 유리수들에 해당하는 비율들이 갖

13) 이는 헤일의 실수 이론에서 (양의) 정수들의 무한성을 보증하기 위해 러셀처럼 논리적 원리인지 의심스러운 가정으로서 무한 공리에 의존할 필요가 없음을 말해준다는 것을 주목할 것.

는 속성 F가 다음 조건들을 만족할 때 그것을 “컷 속성”(cut property)이라고 한다.

(1) F인 것이 존재한다.
(2) F가 아닌 것이 존재한다.
(3) F인 것보다 더 작은 것은 언제나 F이다.
(4) F인 모든 것에 대해 그것보다 더 큰 F인 것이 있다.

헤일은 컷 속성들 사이에 성립하는 동치 관계에 의해 새로운 대상들을 도입하려 하고, 그 기초로서 컷 추상화 원리를 제시한다. 양의 정수들에 비례원리를 적용하여 얻은 비율들의 영역을 R^{N+}라 할 때, x가 R^{N+}을 범위로 갖고, F와 G가 R^{N+}에 대해 정의된 컷 속성이라면, 추상화 원리는 다음과 같다.

* $\forall F \forall G[\mathrm{Cut}(F) = \mathrm{Cut}(G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$.

이 원리에 의해 추상된 대상들 — 헤일 식의 컷들 — 은 완전영역을 이룰 것이다. 그러므로 그런 영역의 대상들로부터 우리는 (양의) 실수 전체에 해당하는 실수들의 존재를 입증할 수 있을 것이다.[14]

3. 실수의 적용 문제

3.1. 헤일의 실수 적용 설명

14) 완전영역이 적어도 하나 존재한다는 것, 그리고 (양의) 실수들이 존재한다는 것에 대한 상세한 논증을 보려면 Hale(2000), 3절을 참조할 것. 양의 실수들의 존재가 주어지면, 음의 실수에 해당하는 비율을 얻는 방법은 어렵지 않다. 이를 위해 헤일은 “0”을 첨가한 다음 차 원리를 양의 비율들에 적용시킨다. “합 연산 ⊕가 양의 실수에 닫혀 있을 때, x와 y의 차 = z와 w의 차 $\leftrightarrow$ $x \oplus w = y \oplus z$.”

헤일의 실수 적용 설명에서 가장 먼저 주목해야 할 사실은 양들 자체의 합 연산 ⊕과 양을 갖는 대상들 사이의 결합 절차를 구분하는 일이다. 후자의 결합을 "○"로 표현하자. 그는 어떤 종류 Φ에 속하는 대상들이 양이기 위해서는 그런 대상들을 양으로 갖는 대상들이 서로 결합되어 새로운 대상을 형성**할 수 있고** 그런 대상은 다시 Φ의 어떤 양을 **가질 수** 있어야 한다고 한다. 하지만 그는 그런 대상이 반드시 존재해야 한다고 요구하지는 않는다. 왜냐하면 물리적 대상들 중에는 결합될 때 같은 종류의 양을 갖는 대상을 형성할 수 없는 경우가 있을 수 있기 때문이다. 예컨대 우주의 질량이 한정 없이 큰 것은 아니라면, 우주의 2/3의 질량을 갖는 어떤 두 대상이 있다 해도 그 둘을 결합해서 우주의 질량보다 더 큰 질량을 갖는 대상을 형성할 수는 없을 것이기 때문이다. 그러므로 임의의 두 대상 x와 y의 결합 x○y가 언제나 존재하는 것은 아닐 것이다.

문제는 양의 영역에 대한 헤일의 조건 (1)이 요구하듯이 임의의 양의 영역 Q가 양들 사이의 합 연산 ⊕ 아래 닫혀 있기 위해서는 Q의 양을 갖는 어느 두 대상 x와 y에 대해서든지 결합 x○y가 존재해야 한다고 간주한다는 데 있다. 왜냐하면 그는 어느 종류의 양이든 대상들 사이의 양적 동치 관계에 의해 주어지는 것으로 간주하며, 이는 양이 존재하기 위해 그것을 갖는 대상이 존재해야 함을 전제할 것이기 때문이다.[15] 이 점은 그가 실수의 적용을 설명하는 데 어려움을 야기한다. 앞에서 본대로 비례원리는 표준영역에 대해서만 성립한다. 그런데 어떤 종류의 양들이 표준영역을 형성하기 위해서는 그 영역은 합 연산 ⊕ 아래 닫혀 있어야 한다. 그러므로 어떤 양의 종류 Φ의 양을 갖는 대상들에 대해 결합 연산 ○가 성립하지 않는다면, Φ의 양들은 표준영역을 형성하지 못할 것이고

15) 헤일은 이 점을 Hale (2002)에서 긍정하고 있다. Hale (2002), 1절 참조.

그런 양들에 대해서는 비례원리도 적용될 수 없을 것이다.[16)]

이 상황은 헤일에게 그리 달갑지 않은 것이다. 왜냐하면 그의 실수 이론의 철학적 동기는 무엇보다 다른 이론보다 실수의 적용에 더 알맞은 정의를 제공하는 데 있기 때문이다. 그런데 우리가 앞에서 본대로 실수들은 바로 비례원리에 의해 도입되는 양의 비율들이고, 임의의 영역의 양들이 비율을 가질 수 있는지 여부는 그런 영역에 비례원리를 적용할 수 있는지에 달려 있다. 다시 말해 우리는 비례원리가 적용되지 않는 영역의 양들에는 실수를 부여할 수 없을 것이다. 그렇다면 결국 표준영역을 형성하지 못하는 양들은 실수를 가질 수 없다는 결론이 따라 나오는 것으로 보인다. 그런데 실수 적용의 대표적 사례는 바로 물리적 양을 측정하는 데 실수를 사용하는 일이다. 물리적 양을 측정할 때 수는 거의 불가피하게 사용되는 것으로 보인다. 그러나 헤일에 따를 때 대부분의 물리량들은 표준 영역을 형성하지 못하고, 앞서 우리가 본대로 표준 영역을 형성하지 못하는 종류의 양들에는 실수를 적용할 수 없는 것으로 보인다. 그러므로 헤일의 실수 이론은 그 철학적 동기를 충족시키기 어려운 것처럼 보인다.

이 난점을 벗어나기 위해 헤일은 표준영역을 형성하지 않는 물리적 양들에 대해서도 실수를 적용할 수 있는 이유를 설명하려 한다. 그는 표준영역이 아닌 물리량들의 영역도 완전영역의 부분적 실현으로 간주될 수 있다는 사실을 주목한다. 다시 말해 그는 질량

16) 헤일이 처한 이런 어려움은 그만 겪는 일은 아니다. 양을 독립된 존재로 간주하기를 거부하는 도구주의적 경향의 측정 이론가들은 양 자체에 수를 부여하는 것이 아니라 양을 갖는 대상에 수를 부여하려 한다. 이런 생각은 네이글에서 유래한다. Nagel (1932) 참조. 그 경우 문제는 물리적 대상들의 영역이 (대상들에 대한) 결합 연산 ○ 아래 닫혀 있지 않다고 여겨지기 때문에, 실수 부여의 정당성을 확보하기 쉽지 않다는 데 있다. 이들이 추상적 존재에 대해 헤일과는 거의 상반된 태도를 지녔음에도 불구하고 유사한 문제를 안고 있다는 점은 흥미롭다.

같은 물리량 체계가 완전영역의 어떤 하부 체계와 구조적으로 동형임을 보일 수 있다는 데 의지해서 문제를 해결하려 한다. 예컨대 질량들의 영역이 주어져 있다고 하자. 우리는 질량들의 결합을 연산 ⓒ로 이해할 수 있다. 그런데 헤일에 따르면, 표준 영역 Q가 주어졌을 때, 질량들로부터 Q 안으로의 1-1 대응 ϕ가 존재한다는 것을 다음과 같이 증명할 수 있다:

> 질량 m_1과 m_2가 $m_1 < m_2$라면, 우리는 $\phi(m_1) < \phi(m_2)$를 갖게 되는데, 이 때 q_1과 q_2가 Q의 임의의 원소이고 $\phi^{-1}(q_1)$과 $\phi^{-1}(q_2)$가 모두 존재할 때에는, $\phi^{-1}(q_1) < \phi^{-1}(q_2)$일 경우에만 $q_1 < q_2$가 성립한다. 또한 [각각 m_1과 m_2를 양으로 갖는 구체적 대상들 a와 b에 대해 a©b가 존재할 때마다], $\phi(m_1) + \phi(m_2) = \phi(m_1 \oplus m_2)$가 된다.[17)]

아마 그는 이런 구조적 동형성에 근거해서 완전영역을 이루지 못하는 양들에도 **간접적으로** 비율을 부여할 수 있다고 생각하는 것 같다.[18)] 다시 말해 질량들의 영역에 직접 비례원리를 적용함으로써 질량에 비율을 부여할 수는 없지만, 한 질량이 다른 질량에 대해 갖는 비율을 질량 영역과 구조적으로 동형인 영역을 하부 체계로 갖는 어떤 완전 영역의 두 양들 사이의 비율로 간주할 수 있다는 것이다.

3.2. 헤일 설명의 난점

---

17) Hale (2002), p. 315. [ ] 안의 언급은 필자가 삽입한 것이다. 헤일의 원문에는 그런 언급이 등장하지 않고, "ml©m2가 존재할 때마다"로 기술되어 있는데, 이는 잘못된 것으로 보인다. 즉, "ml©m2"는 "ml⊕m2"을 잘못 기술한 것이든지, 괄호 안의 언급을 잘못되게 표현한 것으로 보인다.

18) 헤일은 실제로 어떤 구체적 절차에 따라 그런 양들에 비율을 부여할 수 있는지 자세히 설명하지 않는다. 다만 그는 구조적 동형성을 보이는 방법을 간략히 묘사할 뿐이다. Hale (2002), 같은 곳.

앞에서 언급했듯이 헤일의 실수 이론의 한 가지 주요 목적은 수 정의가 수의 적용에 맞게 이루어져야 한다는 프레게의 요구를 — 이 요구는 흔히 “프레게 제한”(Frege's constraint)이라고 불린다 — 만족시키는 것이었다.[19] 프레게는 실수를 양의 측정과 무관하게 추상적 대상이나 체계로 이해하는 칸토르나 데데킨트의 이론만 아니라, 실수를 길이나 넓이 혹은 부피 같은 기하학적 양의 크기와 연결지어 이해하는 항켈 등의 이론도 거부한다.[20] 그가 전자의 이론을 거부하는 이유는 애초에 실수를 양의 측정과 무관하게 정의할 경우, 우리로 하여금 실수가 양의 측정에 널리 사용할 수 있다는 사실을 수의 본성과 무관한 우연한 사실에 불과한 것으로 간주하게 만든다는 데 있다. 반면 그가 후자의 이론을 거부하는 이유는 실수를 그처럼 특수한 양과 관련해서 이해할 때 실수를 왜 어떤 종류의 양의 크기를 결정하는 데에나 보편적으로 적용할 수 있는지 해명할 수 없게 된다는 데 있다. 프레게는 전자의 견해에 반대해서 실수가 양의 측정에 사용된다는 사실은 실수의 우연한 특징이 아니라 본질적 특징과 관련되어 있다고 생각하며, 후자의 견해에 반대해서 실수의 그런 특징은 길이 같은 공간적 양만 아니라, 조도, 질량, 수량 등 어떤 종류의 양에 대해서나 공통으로 적용되는 특징이라고 생각한다. 더밑은 이런 프레게의 생각을 아래와 같이 해설한다:

> 마찬가지로 해석학은 전기나 기계적 작업, 길이나 시간적 지속과는 아무 관계도 없다. 그러나 해석학은 이런 여러 종류의 양들의

---

19) 프레게 제한이 정확히 요구하는 바가 무엇인지, 그리고 프레게 제한이 필요한 수학 이론이 어떤 것인지에 관해 논란이 있다. 나는 여기서 이런 일반적 형식의 문제들은 다루지는 않을 것이고, 주로 헤일의 실수 이론이 만족시키고자 하는 한에서 그런 조건을 다룰 것이다. 프레게 제한에 관한 좀 더 일반적인 논의로는 Wright (2000) 및 박준용 (2007) 참조.

20) Frege (1903), 159절.

> 크기를 특징짓기 위해 실수를 사용하는 일에 기초가 되는 일반 원리를 제공해 준다. 실수는 양의 크기를 직접 표현해 주지 않고, 어떤 양이 같은 유형의 다른 양에 대해 갖는 비율을 표현한다. 이것은 모든 유형에 공통된 것이다. 실수들을 단위와 비교된 양의 크기를 진술하기 위해 사용할 때, 그런 사용을 지배하는 원리는 어떤 특정 유형의 양을 언급하지 않고도 이루어질 수 있다. 그 이유는 어떤 질량이 다른 질량에 대해 갖는 그 똑같은 비율을 어떤 길이가 다른 길이에 대해 가질 수 있기 때문이다. 그런 모든 사용들에 공통되는 것, 그리고 그런 것만이 수학적 대상으로서 실수들의 특징을 규정하는 데 구체화되어야 한다.[21]

말하자면, 프레게 제한은 실수를 정의할 때 이런 저런 특수한 적용을 구체적으로 설명하라고 요구하는 것이 아니라, 어느 적용에서나 공통으로 나타나는 특징을 정의 안에 구체화함으로써 실수의 적용이 일반적으로 어떻게 가능한지 해명할 수 있게 하라는 것이다. 그러므로 실수 정의와 관련해서 프레게 제한의 구체적 내용이 무엇인가 하는 것은 실수의 적용을 공통적으로 지배하는 원리가 무엇인가 하는 데 달려 있을 것이다.

프레게에 따를 때, 실수의 적용을 일반적으로 지배하는 원리는 최소한 두 특징을 가져야 할 것이다. 첫째로 그런 원리는 항켈처럼 실수를 기하학적 양 같은 특수한 부류의 양과 관련해서 설명할 때 생기는 난점에서 자유로워야 할 것이다. 다시 말해 실수 적용의 원리는 특정한 부류의 양에만 적용되는 것이 아니라 어떤 종류의 양들에 대해서든지 똑같이 적용될 수 있어야 할 것이다. 이런 요구를 보편성 요구라고 부르자. 둘째로 그런 원리는 칸토르나 데데킨트처럼 실수를 양의 측정과 무관하게 정의할 때 생기는 난점에서 자유로워야 할 것이다. 다시 말해 우리는 실수 적용의 원리에 따를 때, 어떤 종류의 양들에 관한 우연적인 사실이나 경험적으로만 인식 가능한 사실에 의존하지 않아도 실수를 그런 양들을 측정하는 데

---

21) Dummett (1991), pp. 272-273

사용할 수 있다는 것을 인식할 수 있어야 할 것이다. 이런 요구를 필연성의 요구라고 부르자.

그런데 헤일의 실수 적용 설명은 프레게 제한이 우리에게 요구하는 보편성이나 필연성을 만족하기 힘든 것 같다. 우리는 그의 설명이 이런 요구를 만족하기 힘들다는 사실을 두 가지로 지적할 수 있다.

첫째로 헤일처럼 완전영역의 부분적 실현 가능성에 의존해서 실수의 적용을 설명하게 되면, 어떤 종류의 양들에 실수가 적용 가능한가 여부는 그런 종류의 양들이 완전영역의 부분적 실현인지 아닌지에 달려 있게 된다. 그런데 만약 우리가 문제삼는 종류의 양들이 수량이나 순수 기하학적 양들처럼 정의들 및 공리들에 의해 그 특징이 완전히 규정되는 양들일 경우, 그런 양들이 완전영역의 부분적 실현인지 여부는 선천적으로 결정될 수 있을 것이다. 이에 따라 그런 양들에 실수가 적용가능한지 여부도 경험적 사실이나 우연적 사실에 의존하지 않고 결정할 수 있을 것이다. 반면 만약 우리가 문제삼는 종류의 양들이 물리량들일 경우, 이런 양들이 완전영역의 부분적 실현인지 여부는 선천적으로 결정될 수 있을지 의심스럽다. 왜냐하면 어떤 주어진 종류의 물리량들이 어떤 종류의 영역을 형성하는가 하는 것은 해당 종류의 양들이 갖는 특성들을 검토해 보지 않고 미리 결정할 수 있는 것은 아닐 것이기 때문이다. 예컨대 헤일의 논증에 근거해서 질량이 완전 영역의 부분적 실현임을 받아들인다고 해서, 우리는 그것만으로 조도 같은 다른 종류의 물리량들도 그런 특징을 갖는다는 것을 받아들여야 하는 것은 아니다. 이런 논의가 옳다면 어떤 종류의 물리량들에 실수가 적용가능한지 결정하기 위해 우리는 해당 종류의 양들마다 별도의 검토를 해야 할 것이고, 그 경우 그런 종류의 양들이 갖는 경험적 특성이나 우연적 특성에 의존하는 일을 배제할 수 없을 것이다. 이

점에서 헤일의 실수 적용 설명은 프레게 제한이 우리에게 요구하는 보편성도 필연성도 만족하기 힘든 것 같다.

둘째로 헤일의 설명에 따르면 우리는 어떤 종류의 양들이 어떤 영역을 형성하는지에 따라 실수 적용 방식을 다르게 설명해야 할 것 같다. 왜냐하면 양들 중에는 질량들처럼 표준영역을 형성하지 못하는 양들도 있지만, 그렇지 않은 종류의 양들도 있기 때문이다. 물리량만 양으로 간주하는 좁은 견해를 거부하는 헤일은 예컨대 수량이나 순수 기하학적 양들을 거부할 이유는 없을 것이다. 그러나 수학의 여러 이론들은 명백히 후자의 종류의 양들이 완전영역을 이룬다는 것을 함축한다. 그러므로 실수를 이런 양들에 적용하는 일은 다른 제한 없이 설명되는 반면, 물리량들에 적용하는 일은 양들의 종류마다 완전 영역의 부분적 실현인지 여부에 의존해야 할 것이다. 이 점에서도 헤일의 실수 적용 설명은 프레게 제한이 요구하는 보편성을 만족하지 못하는 것 같다.

물론 헤일은 이에 대해 질량 영역이 완전영역의 부분적 실현임을 보여주는 논증은 다른 종류의 양들에도 적용할 수 있고, 이른바 외연량들은 모두 이런 식으로 실수의 적용을 정당화할 수 있다고 주장할 수 있다.[22] 그리고 그는 이에 더해 두 양의 영역 Φ와 Ψ가 모두 완전영역일 경우, Φ는 Ψ의 부분적 실현이라는 사실에 의존할 수 있을 것이다. 이 경우 헤일은 완전영역의 하부 영역과 구조적으로 동형일 경우 실수가 적용가능하다는 사실은 어느 영역의 양들에나 공통된다고 대꾸할 수 있고, 이 점에서 실수의 적용은 완전영

---

22) 헤일은 캠벨(N.R.Campbell)에 따라서 기초적 측정이 가능한 단순 외연양들과 파생적 측정만 가능한 양들을 구분하고, 적어도 전자의 양들에 대해서는 완전영역의 부분적 실현가능성에 근거해서 실수 적용을 해명할 수 있다고 생각한다. Hale (2002), pp. 316-317. 하지만 그는 이런 일이 실제로 어떻게 가능한지에 대해 충분히 논의하지 않는다. 나는 아래에서 부분적 실현가능성 개념에 의존하지 않고 헤일이 바라는 일반적인 실수 적용 설명에 이르는 방안이 있음을 보이려 한다.

역의 부분적 실현 가능성 개념에 의해 보편적으로 설명 가능하다고 주장할 수도 있을 것이다.

하지만 이런 논의를 받아들인다고 해도 여전히 문제는 남는다. 그 경우에도 양의 비율로서 정의된 실수는 여전히 정의의 토대로서 주어진 양의 영역의 원소들에 직접 적용되지 않는다는 데 문제가 있다. 도리어 여기서 실수는 정의의 토대로서 양의 영역과 적용 대상으로서 양들이 형성하는 영역 사이의 구조적 유사성을 매개로 삼을 때에야 양들에 적용될 수 있다. 그러나 이 때에는 헤일의 실수 정의가 칸토르나 데데킨트처럼 실수를 그 적용과 무관하게 구조적 특성만 고려해서 정의하는 경우보다 나은 점이 무엇인가 하는 것이 문제된다. 왜냐하면 샤피로가 하듯이 실수를 양의 크기와 관련시키지 않고 유리수 집합들 사이의 동치관계에 의해 정의하더라도, 실수의 물리적 적용은 물리량을 갖는 대상 체계와 실수 체계와의 구조적 유사성에 근거해서 해명할 수 있기 때문이다. 실제로 오늘날 많은 측정 이론가들은 실수를 이용하여 물리적 측정이 가능한 이유는 물리량을 갖는 대상들의 체계와 실수 체계와의 구조적 동형성 및 실수 값 부여의 유일성으로 충분히 해명된다고 믿는다. 그렇다면 헤일이 실수를 양의 비율로 정의한다고 해도, 그가 실수 적용 설명을 위해 양의 영역들 사이의 구조적 유사성에 별도로 의존할 경우, 그의 실수 정의가 샤피로식의 실수 정의보다 어떤 점에서 실수 적용을 더 낫게 설명해 주는지 알기 힘들다. 그런데 앞에서 본 것처럼 헤일이 실수를 양의 비율로 정의한 주요 동기 중 하나는 바로 그렇게 할 때 칸토르나 데데킨트 식의 정의보다 실수 적용을 더 낫게 설명할 수 있다는 것이었다. 결국 헤일이 양의 영역들 사이의 동형 개념에 의존하는 한 그의 실수 이론의 주요 동기는 만족되기 힘든 것 같다.

3.3. 난점의 원인 진단

나는 헤일의 실수 적용 설명이 갖는 난점을 그의 실수 이론을 크게 수정하지 않고도 해결할 수 있다고 생각하며, 다음 절에서 그 방안을 제시하려 한다.[23] 이를 위해 먼저 헤일의 설명이 그런 난점에 빠지게 되는 이유를 고찰할 필요가 있다. 나는 다음 몇 가지 점에 그 이유가 있다고 생각한다.

첫째로 헤일로 하여금 실수의 적용 설명을 어렵게 만드는 것은 어떤 대상을 양으로 간주하기 위한 기준과 어떤 대상이 실수를 갖기 위한 기준이 다르다는 데 있다. 우리가 양의 측정 결과를 표현하는 데 실수를 사용한다는 것을 인정한다면, 그리고 우리가 어떤 대상을 양으로 간주한다면, 우리는 그런 대상의 측정 결과를 표현하는 데도 실수를 사용할 수 있음을 인정해야 할 것 같다. 그런데 헤일의 기준에 따라 어떤 대상을 양으로 인정한다 해도, 아직 그것은 실수를 갖기에 충분하지 않을 수 있다. 이 때문에 헤일은 그런 대상에 실수를 부여할 방안을 따로 제시해야 할 처지에 놓인다.

둘째로 헤일은 실수의 적용을 설명하기 위해 기수의 적용과의 유비에 많이 의존하는데, 그의 유비는 적절해 보이지 않는다. 그는 어떤 종류의 양들이 표준영역을 형성한다는 것을 그런 양들이 실수를 갖기 위한 조건으로 간주한다. 마치 어떤 개념이 기수를 갖기 위해서는 그것이 종류 개념이어야 하듯이, 그는 어떤 종류의 양이 단위량에 대해 실수를 비율로 가지려면 그런 양들은 표준영역이어야 한다고 생각한다. 그러나 기수를 갖는 것은 종류 개념이지만,

---

23) 헤일처럼 양을 추상 대상으로 간주하지 않고 속성이나 관계로 간주한다면 여기서 제안하는 방안 이외의 다른 해결도 가능할 수 있다. 1980년대부터 먼디, 스워여 및 미첼 등이 이런 방안을 지지해왔다. 이들의 방안을 보려면 Mundy (1987), Swoyer (1987), Michell (1997)의 논의 참조. 하지만 나는 여기서 양을 추상 대상으로 보는 헤일의 견해를 유지하는 해결 방안을 제안하려 한다.

실수를 갖는 것은 양의 영역이 아니라 양 자체이다. 다시 말해 어떤 양들의 영역 자체가 직접 실수를 갖는 것이 아니라, 어떤 양이 같은 종류의 다른 양에 대해 실수를 갖는 것이다. 그러나 실수 적용과 관련해서 표준영역이 하는 역할을 기수 적용과 관련해서 종류 개념이 하는 역할에 비유하는 것은 이런 기본적 사실을 잊게 하는 경향이 있다.

셋째로 헤일은 양의 기준과 실수 적용 기준의 간격을 메우기 위해 결국 실수 적용의 기준 자체를 2원화하는 방안을 택한다. 이 경우 실수는 한편으로 비례원리의 항이 될 수 있는 양들에 적용 가능한 것으로 간주되는 반면, 다른 한편으로 완전영역의 부분적 실현으로 간주된 영역의 양들에 적용 가능한 것으로 간주된다. 헤일은 전자의 경우 실수 적용을 "직접적인 것"으로, 후자의 경우 실수 적용을 "간접적인 것"으로 간주한다. 전자의 경우 실수는 실수를 추상화하기 위한 토대로서 양의 영역의 항들에 곧바로 다시 적용된다는 점에서 직접적으로 적용된다고 할 수 있다. 반면 후자의 경우 문제되는 양들은 실수를 추상화하기 위한 토대가 아니므로, 실수는 직접적으로 적용될 수 없다. 이 경우 실수는 문제되는 양들이 실수 추상화의 토대가 되는 양의 영역의 부분적 실현이라는 사실을 매개로 해서 적용된다는 점에서 간접적으로 적용된다. 그러나 앞에서 본대로 실수 적용 기준을 이렇게 2원화할 경우, 그의 실수 설명은 프레게 제한이 요구하는 보편성이나 필연성을 만족시키는지, 그리고 칸토르나 데데킨트식의 실수 설명보다 실수 적용에 대해 더 나은 설명을 제공하는지 의심스럽게 된다.

4. 양의 비율로서 실수

나는 이 절에서 헤일의 난점을 극복할 방안을 제공할 것이다. 나

는 먼저 양들이 비율을 갖기 위한 기준 혹은 실수 적용의 기준을 제안할 것이다. 다음으로 이 원리 이외에 양의 크기 결정을 지배하는 원리들이 어떤 것인지, 그런 원리들이 실제로 양의 크기를 결정하는 데에서 어떤 역할을 하는지 해명할 것이다.

4.1. 실수 적용 기준

먼저 헤일의 난점을 해결하기 위해 필요한 일을 분명히 해두는 것이 좋을 것이다. 첫째로 프레게 제한이 요구하는 보편적인 실수 적용의 기준이 필요하다. 나는 이런 기준은 헤일의 양 기준에 따라 양으로 간주되는 어느 대상이나 같은 종류의 다른 양에 대해 어떤 비율을 갖게 해주어야 한다고 생각한다. 둘째로 비율을 갖는 것은 양이지 양의 영역이 아니므로, 나는 양의 영역이 갖추어야 할 조건들은 실수 적용을 설명하는 데 직접 기여하지 않는 것으로 간주하는 편이 낫다고 생각한다. 셋째로 임의의 종류의 양들이 표준영역을 형성하는지 아닌지는 그런 양들이 비율을 갖는지 결정하는 데 직접 기여하는 것으로 간주되지 않을 것이다. 이에 따라 나는 헤일의 비례원리는 양들 일반이 갖는 비율이 무엇인지 설명해 주는 원리로 간주하지 않는 편이 낫다고 생각한다.

이런 몇 가지 지침에 근거해서 나는 헤일의 양의 기준을 바로 어떤 대상이 양의 비율을 갖기 위한 기준으로 삼자고 제안한다.

> ● 어떤 대상이 헤일의 기준에 따라 양으로 간주된다면 그리고 그 경우에만 그것은 같은 종류의 다른 양에 대해 특정 비율을 갖는 것으로 간주된다.

이 제안의 요점은 헤일이 했던 것과는 달리 어떤 종류의 양들이 비율을 갖는가 하는 문제를 그런 양들이 어떤 영역을 형성하는가 하는 문제와 분리하자는 데 있다. 이에 따라 양 개념에 대한 헤일

의 설명은 비율을 갖는 것이 무엇인지 설명해 주는 이론으로 간주될 수 있다. 반면 나는 양의 영역에 대한 헤일의 이론은 일차적으로 해석학의 이론적 요구를 만족시키는 데 목적이 있는 것으로 간주할 것이다. 이와 함께 우리는 헤일의 비례원리가 하는 역할에 대해서도 재고해야 한다. 앞의 제안에 따를 때 어떤 종류의 양들이든 비율을 갖는 것으로 간주되는 반면, 어떤 종류의 양들에 대해서나 비례원리가 성립하는 것은 아니다. 그러므로 더 이상 비례원리는 우리가 양의 크기를 측정한 결과 얻는 값으로서 양의 비율이 — 프레게의 용어로는 "측정 수"가 — 일반적으로 무엇인지 설명해 주는 원리로 간주될 수는 없다. 도리어 그 원리는 완전한 양의 영역이 주어져 있을 때 실수들 전체를 얻기 위한 원리 역할을 한다는 점에서, 순수 수학의 수로서 실수들이 무엇인지 설명해 주는 원리로 간주되어야 할 것이다.

그렇다면 여기서 두 문제가 생긴다. 첫째로 헤일의 비례원리가 더 이상 측정 수가 일반적으로 무엇인지 설명해 주지 않는다면, 측정수로서 양의 비율이 무엇인지 설명해주는 다른 원리가 있어야 할 것이다. 둘째로 만약 비례원리는 산수의 수로서 실수들이 무엇인지 설명해 주고, 측정 수가 무엇인지는 다른 원리에 의해 설명된다면, 측정 수가 바로 산수학의 실수라는 것을 별도로 보증해야 할 것 같다. 나는 이런 두 문제의 해결을 위해 다음 원리를 제안한다.

$$\forall q,\ p \in \mathrm{Q}[\boldsymbol{ratio}(q,\ p) = \boldsymbol{ratio}(\mathbf{r},\ 1) \leftrightarrow$$
$$\forall \mathbf{m},\mathbf{n} \in \mathrm{Z}^{+}[\exists \mathrm{x}(\mathrm{x}=\mathbf{m}q)\ \&\ \exists \mathrm{y}(\mathrm{y}=\mathbf{n}p)\ \Box\!\!\rightarrow (\mathbf{m}q \overset{>}{\underset{<}{=}} \mathbf{n}p \leftrightarrow \mathbf{mr} \overset{>}{\underset{<}{=}} \mathbf{n})].^{24)}$$

이 원리가 말하는 바는 다음과 같다: 임의의 양의 영역 Q가 주어져 있을 때, Q의 임의의 한 양 q가 단위량 p에 대해 갖는 비율

24) 이 원리에서는 측정값 **r** 자체가 비율을 갖는 대상, 즉 양으로 간주되고 있음을 주목할 것.

이 측정값 **r**이 1에 대해 갖는 비율 — 즉 **r** 자신 — 과 같다는 것은 *q*의 **m**배의 양과 *p*의 **n**배의 양이 존재할 경우 반드시 전자의 양은 후자의 양에 대해 **mr**이 **n**에 대해 갖는 똑같은 비례관계를 갖는다는 것이다. 간단히 말해 이 원리는 헤일의 양의 조건을 만족시키는 종류의 양들일 경우 그런 양들 사이의 비율은 언제나 특정 측정값과 같은 것으로 간주할 수 있음을 말한다.[25] 이 원리에서 측정값 **r**은 바로 프레게의 측정수 역할을 한다는 점에서, 나는 그 원리를 "측정수 원리"라고 부를 것이다.[26]

측정수 원리가 하는 역할을 이해하기 위해 그것을 헤일의 비례원리와 비교해 보는 것이 좋을 것이다. 헤일의 비례원리는 완전영역이 주어져 있을 때 해석학 이론을 전개하기에 충분한 실수들을 제공해주는 추상화 원리이다. 그러므로 완전영역이 존재한다는 사실이 전제되면, 비례원리에 의해 실수들 역시 주어진다. 우리는 이미 헤일이 완전영역이 적어도 하나 존재한다는 것을 증명했음을 보았다. 그런데 측정수 원리는 헤일의 양 기준을 만족시키는 어떤 종류의 양들에 대해서나 성립하므로, 우리는 임의의 어떤 양이 같은 종류의 다른 양에 대해 갖는 비율을 언제나 특정 측정수와 동

---

25) 헤일은 비례원리를 수정하여 새로운 비례원리를 제시하려는 시도를 거부한다. Hale (2002), p. 309 각주 15. 그 이유는 그가 비례원리에 2중의 역할을 부여하려 하기 때문이다. 그는 비례원리를 한편으로 양의 비율이 무엇인지 설명해 주는 원리로 간주하며, 다른 한편으로 해석학을 전개시키기에 충분한 실수들을 얻는 데 기여하는 추상화 원리로 이용한다. 그가 비례원리를 수정하려 하지 않은 이유는 그 경우 후자의 역할을 만족스럽게 하지 못하기 때문이다. 그 결과 우리가 본대로 그가 정식화한 비례원리는 첫째 역할을 충분히 하지 못하게 된다. 왜냐하면 그 원리는 표준영역을 형성하지 못하는 양들에는 적용될 수 없기 때문이다.

26) 이 원리는 헤크가 유한 기수의 적용을 설명하기 위해 제안한 유한 흄원리와 비교할 만하다. 헤크는 흄원리가 적용되는 개념이 유한히 많은 대상들이 속하는 개념이라는 조건을 추가하지만, 앞의 원리는 비례 조건 안에 정수곱의 양이 존재한다는 조건을 추가한 것이다. Heck (1997), 2절 참조.

일시할 수 있다. 그러므로 어느 측정수든지 헤일의 비례원리가 제공하는 연속적 실수 체계 내에 속한다는 사실이 입증된다면, 우리는 측정수 원리에 근거해서 어떤 종류의 양들 사이의 비율이든지 산수의 수로서 실수로 간주할 수 있을 것이다. 그러면 측정수 원리의 항으로 나타나는 측정수 **r**이 연속적 실수 체계 내에 속한다는 것은 어떻게 보증되는가? 우리는 완전영역에 비례원리를 적용하여 얻은 실수들 자체가 완전영역을 이룬다는 사실을 주목할 필요가 있다. 그리고 측정수 원리에서 문제되는 어떤 종류의 양에 대해서든지 그런 양들의 상대적 크기로서 측정수 **r**은 언제나 그런 연속적 실수 체계의 범위를 벗어나 있지 않을 것이다. 다시 말해 우리는 어느 측정수 **r**에 대해서든지 원리상 그에 상응하는 — 혹은 그와 동일한 — 실수가 존재한다는 사실을 받아들일 수 있다. 그리고 이에 근거해서 우리는 어떤 종류의 양들의 비율이든지 산수의 수로서 실수로 간주할 수 있고, 헤일의 양 기준을 만족하는 어떤 종류의 양들에나 실수를 적용하는 일을 정당화할 수 있다.

4.2. 실수 적용의 원리들

측정수 원리는 어떤 양 q가 같은 종류의 다른 양 p에 대해 갖는 비율이 있는가 하는 물음에 대답해 준다. 이를 위해서는 오른편 비례조건을 만족시키는 어떤 측정수 **r**이 존재하기만 하면 된다. 반면 우리는 측정수 원리만으로는 그런 양 q가 같은 종류의 다른 양 p에 대해 갖는 비율이 어떤 것인지 충분히 결정할 수는 없다. 이 일은 주어진 양의 크기를 측정하는 절차와 관련되어 있다. 나는 이런 절차에서 우리가 전제해야 하는 어떤 일반적 원리들이 있고, 그런 원리들은 측정수 원리와 마찬가지로 실수 적용을 지배하는 원리 — 즉 프레게 제한을 만족하는 원리 — 로 간주되어야 한다고 생각한다.[27] 그런 원리들이 어떤 것인지, 그리고 그런 원리들이 어떤

역할을 하는지 이해하려면 양의 크기를 측정하는 절차를 검토해 보아야 한다.

길이를 갖는 두 대상으로서 막대 *a*와 끈 *b*가 주어져 있다고 하자. 이 경우 우리는 끈 *b*와 비교해서 막대 *a*가 얼마나 긴지 측정할 수 있을 것이다. 그리고 측정 결과는 끈 *b*의 길이에 대한 막대 *a*의 길이를 표현해주는 양적 비교진술에 의해 주어질 것이다. 예컨대, "막대 *a*는 끈 *b*의 세 배 반만큼 길다." 이런 양적 비교 진술은 다음의 길이 동일성 진술로 바꾸어 쓸 수 있다: "막대 *a*의 길이 = 3.5 × 끈 *b*의 길이." 그리고 이런 길이 동일성 진술에 근거해서 우리는 비율 동일성 진술을 이끌어낼 수 있다: "막대 *a*의 길이가 끈 *b*의 길이에 대한 비율 = 3.5." 이런 절차를 일반화하여 우리는 실수 적용 절차를 다음과 같이 재구성할 수 있다.

> (1) 어떤 종류 Φ의 양 *q*가 Φ의 단위량 *p*에 대해 얼마나 큰지 결정하려 한다고 하자.
> (2) *q*가 *p*와 비교할 때 얼마나 큰지 측정한다.
> (3) 측정 결과 얻은 값을 *q*가 *p*에 대해 갖는 (상대적) 크기로 간주하고, 그 결과를 "*q*는 *p*의 *r*배이다"라는 양 비교 진술로 표현한다. [여기서 "*r*"은 수형용사이다.]
> (4) 양 비교 진술 "*q*는 *p*의 *r*배이다"를 양 동일성 진술 "*q* = **r***p*"로 바꾸어 쓴다. [여기서 "**r**"은 수자이다.]
> (5) *q*가 *p*에 대해 갖는 비율로서 측정값 **r**을 부여할 수 있다.

먼저 단계 (2)에서 (3)으로 나아가는 절차를 고려해 보자. Φ의 임의의 두 양 사이에 어떤 단순 양적 관계가 성립하는지에 따라 Φ

---

27) 임의의 양 *q*가 같은 종류의 다른 양 *p*에 대해 갖는 비율이 존재하는가 하는 문제는 선천적으로 대답할 수 있는 문제이지만, *p*에 대한 *q*의 비율이 어떤 것인가 하는 문제는 언제나 선천적으로 결정되는 것은 아니다. 반면 후자의 물음에 대답하는 절차에서 우리가 전제해야 하는 일반적인 원리들은 프레게의 제한에 따라 보편성과 필연성을 갖는 선천적인 원리들이어야 할 것이다.

의 양들의 (크기에 따른) 순서가 결정된다. 다시 말해 Φ의 영역 Q에 속하는 양들 q^0, q^1, q^2, q^3, …, q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, … 등은 아래와 같이 크기에 따라 순서가 결정된다.[28)]

$$Q = < \cdots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, \cdots >$$

이제 Φ의 어떤 양 p를 단위로 선택하자.[29)] 그러면 Φ의 모든 양 각각이 p보다 몇 배나 더 큰지 결정할 수 있을 것이다. 이처럼 p에 상대적인 q의 크기를 실제로 정하는 일은 측정 도구를 이용한 직접 관찰에 의한 것일 수도 있고, 아주 복잡한 추론에 근거한 것일 수도 있다.[30)] 만약 q가 p의 몇 배인지 결정했다면, 우리는 아래

28) 여기서 지수 0, 1, 2, 3, …, -1, -2, -3, … 은 단지 크기에 따른 순서를 표현할 뿐이다. 나는 모든 양을 크기에 따라 **일렬로** 배열할 수 있다고 주장하지 않는다. 다만 같은 종류의 임의의 어떤 두 양이든지 크기를 비교할 수 있으므로, 양들이 크기에 따라 순서를 갖는다는 것을 말하려 할 뿐이다.

29) Φ의 단위란 Φ의 양들 중 임의로 선택된 양이다. 단위는 실천적 목적에 따라 임의로 선택되지만, 단위가 한 번 정해지면 Φ의 어떤 양 q가 단위와 비교할 때 얼마나 큰지는 임의로 정해지지 않는다. 단위가 정해지면 단위를 표준 크기로 삼는 측정 도구가 상정된다. 측정도구의 눈금은 단위의 (양의) 정수배에 해당하는 값들에 대응한다. Φ의 어떤 양에도 해당하지 않는 눈금이 있을 수 있다. 그렇다고 해서 이 눈금이 필요 없는 것은 아니다. 눈금은 가능한 양의 크기를 표시하는 것이지 실제로 존재하는 양만 표시하는 것이 아니다. 현재 어디에도 존재하지 않는 양이라 할지라도, 그런 양이 언젠가 어딘가에 있을지도 모른다.

30) 측정도구를 실제 크기를 결정하는 데 사용하기 위해 원리상 우리는 측정 표준으로서 이상적인 연속체를 가정해야 한다. 왜냐하면 아무리 작은 양을 단위량으로 설정하더라도 Φ의 어떤 양 q는 측정 도구의 어느 눈금에 해당하는 값도 갖지 않을 수 있기 때문이다. 그 값은 단위량의 유리수배에 해당하는 값일 수도 있고 무리수배에 해당하는 값일 수도 있다. 측정도구가 물리적 한계를 갖는 한, 주어진 양의 실제 크기는 측정도구만으로 충분히 결정할 수 없다. 왜냐하면 측정도구는 실제크기를 알려주는 것이 아니라, 실제 크기의 범위만 알려주기 때문이다. 경험적 측정에서 주어진 범위 내에서 실제의 크기를 결정하는 일은 근사적으로만 가능한 일이며, 실제의 크기를

의 양 비교 진술을 얻는다.

q는 p의 r배이다.

이제 단계 (3)에서 단계 (4)로 나아가는 절차를 고려하자. 이를 위해서는 Φ의 단위량 p에 대한 Φ의 양 q의 상대적 *크기*에 관한 "q는 p의 r배이다"라는 형식의 양 비교 진술이 양 동일성 진술 "$q = \mathbf{r}p$"로 교체될 수 있어야 한다. 그러므로 다음 사실이 성립해야 한다.

(6) q는 p의 r배이다 $\leftrightarrow$ $q = \mathbf{r}p$.

(6)은 양들 사이의 상대적 *크기*에 관한 비교 진술을 양 동일성 진술과 연결시켜 준다. 그런데 이 원리에서 $\mathbf{r}$은 양 q를 측정 단위 p와 비교해서 얻은 측정값이다. 그러므로 이 값이 산수의 수로서 실수와 동일시될 수 있다면, 우리는 원리 (6)을 산수의 수와 측정 수를 연결시키는 것으로 간주할 수 있을 것이다. 이런 뜻에서 (6)은 "다리 동치원리"라고 불릴 만하다.

그러면 측정수 $\mathbf{r}$은 어떻게 산수의 수로서 실수와 동일시될 수 있는가? 만약 Φ의 어느 양에 대해서나 그것이 p보다 몇 배나 더 큰지 결정할 수 있다면, (6)에 따라 우리는 Φ의 영역 Q를 아래와 같이 표현할 수 있을 것이다.

$$\mathrm{Q} = \langle \cdots, \mathbf{r}^{-3}p, \mathbf{r}^{-2}p, \mathbf{r}^{-1}p, 1\times p, \mathbf{r}^{1}p, \mathbf{r}^{2}p, \mathbf{r}^{3}p, \cdots \rangle$$

그런데 임의의 정수 n에 대해 $\mathbf{r}^{n}p$가 얼마나 큰 양인지 정확히 대

특정해서 지정하는 일은 측정 표준으로서 연속체가 존재한다는 것을 전제로 삼는 이상적 상황에서나 가능한 일이다.

답하려면, 우리는 $\mathbf{r}^n p$의 측정수 $\mathbf{r}^n$이 어떤 크기의 실수인지 알아야 한다. 그러면 우리는 그 측정수의 크기를 어떻게 알 수 있는가? 이는 결국 $\mathbf{r}^n$이 다음의 연속적인 실수 체계 내에서 어떤 위치를 차지하는지에 달려 있다.

$$<\cdots,\ \mathbf{r}^{-3},\cdots,\ \mathbf{r}^{-2},\cdots,\mathbf{r}^{-1},\cdots,\ 1\ ,\cdots,\ \mathbf{r}^{1},\cdots,\ \mathbf{r}^{2},\cdots,\ \mathbf{r}^{3},\ \cdots>$$

말하자면 측정수 $\mathbf{r}$을 산수의 수로서 실수와 동일시할 수 있는 이유는 Φ의 영역 Q의 원소들에 나타나는 어떤 측정수에 대해서든지 연속적 실수 체계 내에 어떤 원소와 대응시킬 수 있다는 데 있다.[31] 그리고 이 일이 가능하기 위해서는 우리는 연속적인 실수 체계가 존재한다는 것을 전제해야 한다.

이제 (4)에서 (5) 단계로 나아가는 절차를 보자. 다리 동치원리는 측정 결과를 산수의 수로 표현할 수 있게 해주기는 하지만, 측정 결과가 옳다는 것을 보증해 주지는 못한다. 그러면 양들을 측정할 때 생기는 우연적인 오류들을 논외로 할 때, 측정 결과가 옳다는 것은 원리상 무엇에 의존하는가? 이를 위해서는 적어도 (4)에서 적용한 수 $\mathbf{r}$이 실제로 q가 단위량 p에 대해 갖는 그 상대적 크기임을 보여주어야 하고, 이는 다시 q가 단위량 p에 대해 갖는 똑같은 비례 관계를 $\mathbf{r}$이 단위 비율 1에 대해 갖는다는 것을 입증해야 함을 요구한다. 그러므로 양 q에 $\mathbf{r}$을 부여하는 일이 정당하려면, q와 $\mathbf{r}$에 대해 다음 동치 관계가 성립해야 한다.

---

31) 이런 대응가능성을 헤일의 부분적 실현가능성과 혼동해서는 안 된다. 헤일의 경우 문제되는 것은 양들의 영역 사이에 성립하는 관계인 반면, 여기서 문제되는 것은 측정수로서 비율들과 표준 실수 체계를 이루는 비율들 사이에 성립하는 관계이다. 앞에서 언급했듯이 이런 대응가능성은 헤일의 비례원리를 완전영역에 적용하여 얻은 실수 체계 자체가 완전영역이라는 사실에 의해 보증된다.

> (7) q가 단위량 p에 대해 갖는 똑같은 비례 관계를 **r**이 단위 비율 1에 대해 갖는다.

r을 양 q에 부여하기 위해 (7)이 성립해야 한다는 것은 결국 양 q에 대한 측정수 원리의 사례가 성립해야 한다는 것이다. 그러므로,

> (8) 어떤 종류 Φ의 양 q와 Φ의 단위량 사이에 성립하는 비례관계와 똑같은 관계를 갖는 표준 비율 체계 내의 단위비율 1에 대한 어떤 비율 **r**이 존재한다는 것을 보증해 주는 원리가 성립해야 한다.

이런 논의가 옳다면 우리는 실수 적용 절차를 지배하는 원리를 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째로 측정수 원리는 주어진 종류의 양들 사이의 비율이 무엇인지 설명해 주며, 산수의 수로서 실수를 그런 양들 사이의 비율로 간주할 수 있게 해준다. 둘째로 어떤 양 q가 같은 종류의 다른 양 p에 대해 갖는 비율이 어떤 것인지 결정하기 위해서는 우선 p에 대한 q의 상대적 크기를 표현하는 문장을 측정값 표현 "**r**"이 나타나는 양 크기의 동일성 문장으로 전환할 수 있게 해주는 다리 동치 원리가 필요하다. 셋째로 측정값 **r**이 실제로 어떤 크기의 비율인지 정하기 위해서는 그런 값 — 혹은 그에 상응하는 값 — 을 원소로 포함하는 연속적 실수 체계가 존재해야 한다. 연속적 실수 체계의 존재는 헤일이 한대로 흄원리 및 컷원리에 근거해서 완전영역이 적어도 하나 존재한다는 것을 증명하고 그런 영역에 헤일의 비례원리를 적용함으로써 입증할 수 있을 것이다.

4.3. 양의 비율로서 실수

실수 적용에 대한 헤일의 설명과 나의 설명 사이의 주요 차이는 다음과 같다. 헤일은 측정수 원리를 새로 도입하는 대신 양이 실수

를 갖기 위한 조건을 2원화하는 방안을 택했다. 반면 나는 양의 비율로서 실수에 관한 설명을 헤일의 비례원리에 의한 산수의 수로서 실수에 관한 설명과 측정수 원리에 의한 양들의 비율에 관한 설명으로 2원화하지만, 양이 실수를 갖기 위한 조건은 단일화했다.

나의 방안은 헤일의 방안보다 실수가 양의 측정에 왜 보편적으로 사용되는지 더 낫게 설명해 준다. 어느 측정수에 대해서나 표준 실수 체계 내에 그에 상응하는 실수가 존재한다는 사실을 받아들인다면, 우리는 헤일의 기준에 따라 양으로 간주된 어느 대상이나 실수를 가진다는 것을 받아들일 수 있다. 다시 말해 실수의 적용 가능성은 단일한 원리에 의해 보증된다. 이에 따라 헤일의 경우처럼 주어진 종류의 양들에 실수를 적용할 수 있는지 결정하기 위해 그런 양들의 영역이 완전영역의 부분적 실현인지 따로 검토할 필요가 없다. 이에 따라 나의 방안은 양들의 종류마다 다를 수 있는 우연적 특징들에 의존할 필요가 없다.

아마 누군가 나의 제안에서는 양의 비율에 관한 설명을 2원화함으로써 헤일이 마주쳤던 것과 유사한 난점이 생긴다고 주장할지 모른다. 말하자면 나의 제안에서도 실수와 측정수 사이의 동일성을 해결하기 위해 측정수들과 실수 체계 사이의 어떤 구조적 유사성에 의존해야 할 것이고, 이는 여전히 실수 적용을 설명하기 위해 실수 정의 이외의 별도의 작업이 필요함을 보여준다고 주장할지 모른다. 그러나 여기서 우리는 두 사실을 주목할 필요가 있다. 첫째로 나의 제안에서 문제되는 것은 양의 영역들 사이의 구조적 유사성이 아니라, 측정 결과 얻은 값으로서 비율을 이미 확립된 표준적인 실수 체계 내에서 확인하는 일일 뿐이다. 둘째로 원리상 이 일은 예컨대 물리량 같은 양들에 관한 어떤 경험적 검토에도 의존하지 않는 선천적으로 가능한 작업이다.

참고문헌

박준용 (2007), “프레게 제한 — 수의 정의와 적용가능성”,『논리연구』 제10집 제2호, pp. 47-107.

박준용 (2009), “종류 개념과 시저 문제”,『철학연구』 제86권 pp. 295-331.

Batitsky, V. (2002), “Some measurement-theoretic concerns about Hale’s ‘Reals by abstraction’”, *Philosophia Mathematica* (3) 10, pp. 286-303.

Cook, R. T. (2002), “The state of the economy: Neo-logicism and inflation”, *Philosophia Mathematica*. Series3, vol.10, pp. 43-66.

Dummett, M. (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth.

Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, Wilhelm Koebner.

Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik I*, Jena, Hermann Pohle.

Frege, G. (1903), *Grundgesetze der Arithmetik II*, Jena, Hermann Pohle.

Hale, B. (2000), “Reals by abstraction”, *Philosophia Mathematica*, vol.8, pp. 100-123.

Hale, B. (2000a), “Abstraction and Set Theory”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41, No.4, pp. 379-391.

Hale, B. and Wright C. (2001), *The Reason’s Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.

Hale, B. (2002), "Real Numbers, Quantities, and Measurement", *Philosophia Mathematica* (3), Vol.10, pp. 304-323.

Hale, B. (2005), "Real Numbers and Set Theory: Extending the Neo-Fregean Programme Beyond Arithmetic", *Synthese* 147, pp. 21-41.

Hale, B. and Wright C. (2005), Logicism in the Twenty-first Century, *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pp. 166-202.

Heck, R. (1997), "Finitude and Hume's Principle", *Journal of Philosophical Logic*, pp. 589-617.

Michell, J. (1997), "Bertrand Russell's 1897 critique of the traditional theory of measurement", *Synthese* 110, pp. 257-276.

Mundy, B. (1987), "The Metaphysics of Quantity", *Philosophical Studies* 51, pp. 29-54.

Nagel, E. (1932), "Measurement", *Erkenntnis* 2, pp. 313-333.

Shapiro, S. (2000), "Frege meets Dedekind: A neologicist treatment of real analysis", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41, pp. 335-364.

Shapiro, S. (2011), "The Company Kept by Cut Abstraction (and its Relatives)", *Philosophia Mathematica* (Ⅲ) 19, pp. 107-138.

Stein, H. (1990), "Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics", *Synthese* 84, pp. 163-182.

Swoyer. C. (1987), "The Metaphysics of Measurement", in J. Forge (ed.): *Measurement. Realism and Objectivity*. Reidel, pp. 235-290.

Wright, C. (2000), “Neo-Fregean foundations for real analysis: Some reflections on Frege’s constraint”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41, pp. 317-334.

충남대학교
Chungnam University
pjyong@hanmail.net

Real Numbers as Ratios of Quantities

Jun-Yong Park

Bob Hale recently proposed a theory of real numbers based on abstraction principles. In his theory, real numbers are regarded as ratios of quantities and the criteria of identities of ratios of quantities are given by an Eudoxan ratio principle. The reason why Hale defines real numbers as ratios of quantities is that he wants to satisfy Frege's requirement that arithmetical concepts should be defined to be adequate for their universal applicability. In this paper I show why Hale's explanation of applications of real numbers fails to satisfy Frege's requirement, and I propose an alternative explanation. At first I show that there are some gaps between his explanation of the concept of quantity and his stipulation of domains of quantities, and that those gaps give rise to some difficulties in his explanation of applications of real numbers. Secondly I introduce a new ratio principle which can be applied to any kinds of quantities, and I argue that it allows us an adequate explanation of the reason why real numbers as ratios of quantities can be universally applicable. Finally I enquire into some procedures of the measurement of quantities, and I propose some principles which we should presuppose in order to successfully apply real numbers to the measurement of quantities.