논리연구 14-3(2011) pp. 101～136

직관주의적 유형론에서의 분석성과 완전성* **

정 인 교

【요약문】 마틴뢰프는 그의 직관주의적 유형론에서의 판단형식들에 관한 분석에 의거하여, 통상적인 논리법칙들과 수학의 흥미로운 판단들은 분석판단이 아닌 종합판단에 해당하며, 분석판단의 논리는 결정가능하고 완전하지만 종합판단의 논리는 결정가능하지 않으며 불완전하다고 주장한다. 이 글의 목적은 마틴뢰프의 논지를 보다 분명히 하여 검토하려는 것이다. 1절에서 필자가 이해한 단형 유형론의 기본 사항들을 검토한 후, 2절에서는 마틴뢰프의 분석/종합 구분을 보다 분명히 드러내고, 마틴뢰프의 구분에 대한 가능한 비판 및 '통상적인 논리법칙들과 수학의 흥미로운 판단들은 종합판단에 해당한다'는 논제를 검토한다. 3절에서는 '분석판단의 논리는 결정가능하고 완전하지만 종합판단의 논리는 결정가능하지 않으며 불완전하다'는 논제를 보다 분명히 드러내어 검토한다.

【주요어】 마틴뢰프, 직관주의적 단형 유형론, 분석판단, 종합판단, 불완전성

---

* 접수일자: 2011.9.23. 심사 및 수정완료일: 2011.10.7. 게재확정일: 2011.10.13.

** 이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2007-327-A00159). 유익한 논평을 해 주신 익명의 심사위원들께 감사드린다.

마틴뢰프(P. Martin-Löf)는 그의 직관주의적 유형론에서의 판단형식들에 관한 분석에 의거하여, 통상적인 논리법칙들과 수학의 흥미로운 판단들은 분석판단이 아닌 종합판단에 해당하며, 분석판단의 논리는 결정가능하고 완전하지만 종합판단의 논리는 결정가능하지 않으며 불완전하다는 놀라운 논제들을 제시한다.[1] 이 글의 목적은 마틴뢰프의 논제들의 의미를 보다 분명히 하여 이들을 검토하려는 것이다. 마틴뢰프의 논지를 이해하는 데에 있어서 난점 중의 하나는, 그의 논지는 직관주의적 단형 유형론(monomorphic version of intuitionistic type theory, 이하 '단형 유형론')에 기초하고 있지만 이 체계에 대한 그의 설명은 아직 출판되지 않은 강연록의 형태로 있다는 점이다. 마틴뢰프의 단형 유형론은 다른 많은 학자들에 의해 검토되어 왔지만, 다수의 문헌들에서 철학적 혹은 기초론적 관점보다는 전산학적 관점이 강조되고 있다. 1절에서는 필자가 이해한 단형 유형론의 기본 사항들을 제시하여 검토할 것이다. 2절에서는 마틴뢰프의 분석/종합 구분을 보다 분명히 드러내고, 마틴뢰프의 구분에 대한 가능한 비판 및 '통상적인 논리법칙들과 수학의 흥미로운 판단들은 종합판단에 해당한다'는 논제를 검토할 것이다. 3절에서는 '분석판단의 논리는 결정가능하고 완전하지만 종합판단의 논리는 결정가능하지 않으며 불완전하다'는 논제를 보다 분명히 드러내고 검토할 것이다.

1. 단형 유형론

마틴뢰프의 논제들은 직관주의적 단형 유형론에서의 판단형식들에 관한 분석에 기초한다. 여기서 고려되는 마틴뢰프의 단형 유형론은 아직 출판되지 않은 그의 강연록에 기초하여 여러 학자들이

---

1) Martin-Löf, P. (1994).

제시한 것이다.[2] ‘다형(polymorphism)’과 ‘단형(monomorphism)’의 통상적 의미가 암시하듯이, 다형 유형론의 항은 여러 유형들을 지닐 수 있지만, 단형 유형론의 항은 오직 하나의 유형만을 지닐 수 있다.[3] 그러나 다형 유형론과 단형 유형론의 보다 근본적인 차이는 유형 개념에 기인한다. 다형 유형론에서와는 달리 단형 유형론에서 유형(type)은 집합(set)과 명시적으로 구분되는 것이다.

집합은, 그 표준적 원소(canonical element)들이 어떻게 형성되는지 규정하고, 그 표준적 원소들 간의 동일성 조건이 무엇인지를 규정함으로써 정의된다. 예컨대 자연수 집합의 표준적 원소들은 0이거나 x가 자연수라는 가정 하에 succ(x)의 형태를 지니고,[4] 이들 간의 동일성 조건은 0과 0은 같은 자연수이며 x와 y가 같은 자연수라면 succ(x)와 succ(y)도 같은 자연수라고 규정될 수 있으며, 이는 다형 유형론에서의 자연수 도입규칙들에 해당한다.

(N-Intro 1) (N-Intro 2)

$$0\in N \qquad \frac{x\in N}{succ(x)\in N} \qquad 0=0\in N \qquad \frac{x=y\in N}{succ(x)=succ(y)\in N}$$

어떤 대상 x가 어떤 집합 A의 원소라는 판단 ‘x∈A’는 x가 A의

---

2) 여기서 언급된 마틴뢰프의 강연은 1987년에 이루어졌으며, 그 내용은 강연록을 통해 많은 학자들에게 알려지고 연구되었다. 마틴뢰프의 단형 유형론이 제시된 많은 문헌들 중 대표적인 것들로는 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990)의 Part Ⅲ 및 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (2000)가 있다. (Salvessen (1988) 또한 단형유형론에 관한 간명한 소개를 포함하고 있다.)

3) 직관주의적 다형 유형론에 관한 보다 자세한 설명을 위해서는 정인교 (2011) 및 거기 언급된 참고문헌을 볼 것. 정인교 (2011)의 (표 5)에서 Σ-equality의 두 번째 전제 ‘b(x)∈B(x) [x∈A]’는 ‘b∈B(a)’의 오타이므로, 바로 잡는다.

4) succ(x)가 표준적 자연수이기 위해서 x가 표준적 자연수일 필요는 없다.

표준적 원소로 환원된다는 것을 의미한다. 여기서의 환원 관계는 '정의적 동일성(definitional equality)'이라고 불리는 것으로, 정의에 의해 그 동일성을 효과적으로 결정할 수 있는 관계이다. 예컨대 2+2는 succ(2+1)과 같은 자연수라는 판단(2+2=succ(2+1)∈N)을 정의에 의해 입증할 수 있고 succ(2+1)은 N의 표준적 원소이기 때문에 2+2는 N의 원소가 된다. 이와 같이 어떤 집합은 그 표준적 원소들이 어떻게 형성되는지 귀납적으로 규정함으로써 정의되고 어떤 대상이 그 집합의 원소가 되기 위해서는 그 집합의 표준적 원소로 환원될 수 있어야 하므로, 특정 집합의 원소들을 모두 산출하는 완전한 규칙이 제시될 수 있으며, 이런 의미에서 그 원소들에 대한 완전한 기술이 가능하다. 아울러 직관주의 논리상항에 대한 BHK 해석 및 집합과 명제의 동형논제를 따르면, 명제는 그 표준적 증명에 의해 정의되며, 집합의 원소는 명제의 증명에 해당한다. 이에 따라 다형 유형론에서는 통상적인 논리상항들은 집합 혹은 집합족(family of sets)에 적용되어 집합을 산출하는 원초적인 연산들로 간주되었다. 그러나 집합과 구분되는 유형이 명시적으로 도입되는 단형 유형론에서는 이런 논리상항들이 원초적인 표현들로 간주될 필요 없이 특정한 유형의 대상들로 정의될 수 있다.

마틴뢰프는 일찍부터 수학적 대상은 항상 어떤 특정한 유형의 대상이라는 논제를 일관되게 유지해 왔다.[5] 이는 수학적 대상은 어떤 자연수, 어떤 집합 혹은 어떤 함수와 같은 것들이며, 설혹 '그냥 대상' 혹은 '아무런 유형에도 속하지 않는 대상'이 있다하더라도 이들은 수학적 대상은 아니라는 의미일 것이다.[6] 대충 말해

---

5) "Every mathematical object is of a certain kind or *type* which is uniquely associated with the object in question." (Martin-Löf, P. (1971), p. 1.)

6) 기취(P. Geach)의 잘 알려진 논증은 '그냥 대상' 혹은 '아무런 유형에도 속하지 않는 대상'의 유의미성에 대한 비판으로 확장될 수 있다. (예컨대 Geach (1972) 7장을 볼 것.) 직관주의적 유형론에서의 정의적 동일성 판단

서, 유형은 동일성 조건이 주어진 어떤 대상들의 전체에 해당한다.[7] 집합의 원소들은 도입규칙들 혹은 귀납적 정의에 의해 주어지는 그 집합의 표준적 원소들과 동일한 대상들이고, 여기서의 동일성은 효과적으로 결정가능한 정의적 동등성관계이다. 이런 의미에서 어떤 집합이든 그 집합의 원소들 전체는 완전히 파악될 수 있다. 그러나 특정 유형을 지니는 대상이 되기 위해서는 (동일성 조건과 함께) 어떠한 조건이든 그 유형에 속하기 위한 조건을 만족하기만하면 되므로, 특정 유형을 지니는 대상들 전체는 특정 집합의 원소들 전체가 파악되는 방식으로 파악될 수 없다. 이런 의미의 유형은 마틴뢰프가 다형 유형론을 제시한 그의 강연록에서 '범주(category)'라고 부르는 것에 해당한다.

> 어떤 범주는 그 범주에 속하는 대상이 무엇인지 그리고 어떤 경우에 그런 두 대상들이 동일한지를 설명함으로써 정의된다. 범주는 집합일 필요가 없다. 왜냐하면 우리는 주어진 범주에 속하는 대상이 된다는 것이 무슨 의미인지를 그런 모든 대상들을 형성하는 규칙이 없더라도 파악할 수 있기 때문이다. 예컨대 우리는 이제 집합이 무엇인지, 그리고 어떤 경우에 두 집합들이 동일한지를 파악하므로, 우리는 집합들의 범주를 (마찬가지로, 명제들의 범주를) 정의하였지만, 그것은 집합은 아니다. ......범주를 정의하기 위해서는, 그 범주의 대상들이 어떻게 형성되는 지에 대한 처방은 불필요하며 그 범주에 속하는 (임의의) 대상이 무엇인지 파악할 수 있기만 하면 된다. 각 집합은 어떤 범주를, 즉, 그 집합의 원소들의 범주를 결정하지만, 그 역은 성립하지 않는다. 예컨대 집합들의 범주와 명제들의 범주는 집합들이 아니다. 왜냐하면 그들의 원소들이 모두 어떻게 형성되는지 우리는 기술할 수 없기 때문이다.[8]

(a=b:A)은 항상 유형에 상대적인 판단으로서, 이에 대한 규정은 A가 유형이라는 판단 (A type)의 전제 조건이다.

7) "...... a type is a collection of objects with an equivalence relation", Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), p. 154. 여기 언급된 'equivalence relation'은 그 유형의 대상들 간의 동일성 조건을 나타낸다.

8) Martin-Löf, P. (1984), pp. 21-22.

인용문에서 언급된 집합들 간의 동일성 조건은 A와 B가 같은 집합이라는 판단(A=B:Set)의 의미, 즉, 그 판단을 올바르게 내리기 위한 조건에 의해 설명된다. 이는 A의 표준적 원소들은 모두 B의 표준적 원소들이고 그 역도 성립하며, A의 동일한 표준적 원소들은 B의 동일한 표준적 원소들이고 그 역도 성립한다는 조건에 해당한다. 한편 앞서 설명한대로 어떤 대상이 집합이기 위한 조건은 그 대상의 표준적 원소들이 어떻게 형성되며 그들 간의 동일성 조건이 무엇인지에 관한 규정에 해당한다.[9] 이로부터 '집합은 범주이다'는 판단, 혹은 '범주' 대신 '유형'이란 표현을 쓸 때, '집합은 유형이다'는 판단이 정당화된다. 이 판단은 단형 유형론의 'Set type'이라는 공리에 해당한다.[10] 또한 앞서 설명한대로, A가 집합인 경우 'a가 A의 원소이다'는 판단은 a가 A의 어떤 표준적 원소와 같다는 의미이고, 'a와 b가 A의 같은 원소이다'는 판단은 a와 b가 A의 어떤 표준적 원소와 같다는 의미이므로, A의 원소들(El(A))은 한 유형이 되기 위한 조건을 만족한다. 이 설명에 의해 다음 추론 규칙이 정당화된다.

(El Formation)

$$\frac{A:\mathrm{Set}}{\mathrm{El}(A)\ \mathrm{type}}$$

러셀(B. Russell)과 처취(A. Church)의 유형론과 비교할 때 한 가지 특이한 점은 직관주의적 유형론에서는 러셀과 처취의 유형론

9) '(유형) A에 속하는 대상'과 '(집합) A에 속하는 대상'간의 혼동을 피하기 위해, 우리는, 마틴뢰프를 따라, 각각 '(유형) A의 대상(object of A)' 및 '(집합) A의 원소(element of A)'라는 표현을 사용할 것이다. (Martin-Löf, P. (1984), p. 22.)

10) 마틴뢰프 유형론에서의 공리나 정리는 명제가 아니라 판단이다. 정인교 (2011) 참조.

에서 가장 낮은 레벨(level)에 해당하는 개체들(individuals)의 유형, 즉, 처춰의 ι는 El(A)와 같이 각 집합의 원소들에 해당하는 유형들로 나누어진다는 것이다.[11] 만약 모든 집합들을 산출하는 규칙이 있다면, 즉, 모든 집합들이 귀납적으로 정의될 수 있다면, 집합들 전체는 집합이 될 것이고, 원소들 전체, 즉, 개체들 전체는 한 유형에 해당할 것이다.[12] 그러나 인용문에서 언급되었듯이, 집합들 전체를 산출하는 규칙을 우리는 알지 못한다. 집합들 전체를 산출하는 규칙은 없다는 논제는 - 이는 직관주의적 명제개념을 따르면 명제들 전체를 산출하는 규칙은 없다는 논제에 해당한다 - 직관주의의 한 기본 논제에 해당한다고 여겨질 수 있다.[13] 이런 직관주의적

11) Martin-Löf, P. (1994), pp. 91-92 참조.

12) 마틴뢰프는 직관주의적 유형론의 최초 버전인 그의 Martin-Löf, P. (1971)에서 유형들 전체를 하나의 유형으로 간주하였다. 이런 (비서술적) 가정은, 집합들 전체의 집합을 인정한 것과 같은 효과를 낳으며, 모순을 산출한다는 사실이 Y. Girard에 의해 입증되었다. 마틴뢰프 유형론의 후속 버전들은 모두 이런 가정을 배격하며 서술적 이론에 해당한다. 기라르의 역설에 대한 마틴뢰프 자신의 설명을 위해서는 Martin-Löf, P. (1998)을 참조할 것.

13) 이 점에 대해서는, ‘모든 (수학적 명제들의) 증명들 전체를 산출하는 규칙은 없다’는 것을 직관주의의 기본 논제라 할 때, 다음과 같은 정당화가 가능할 것으로 보인다. 직관주의적 명제 개념에 의하면, 명제는 앞서 설명된 의미의 집합과 동등하며, 어떤 집합의 원소는 그와 동등한 명제의 증명에 해당한다. 따라서 (모든 집합들의) 원소들 전체, 즉, 처춰의 ι는 (모든 명제들의) 증명들 전체에 해당한다. 그러나 모든 (수학적) 명제들의 증명들 전체를 산출하는 규칙은 없다는 것은 직관주의의 기본 논제 중의 하나이다. 따라서 모든 증명들 전체는 집합이 될 수 없다. 이로부터 명제들 전체도 집합이 될 수 없다는 결론, 즉, 모든 명제들을 산출하는 규칙은 없다는 결론이 따라 나온다. (이 정당화는 A가 집합일 때, El(A)의 표준적 원소는 A의 표준적 원소와 같은 것으로 간주할 수 있으므로, El(A)는 유형일 뿐 아니라 집합으로 간주될 수 있다는 점에 의존한다. 아울러, 이 정당화에서의 진술은 ‘반사실적’ 조건문의 형태로 이해되어야 한다. 직관주의적 유형론에서의 양화사의 도메인은 집합이어야 하기 때문에, 명제들 전체 혹은 집합들 전체가 집합이 아니라면 ‘모든 집합’이나 ‘모든 명제’에 의해 의도된 내용은 직관주의적 유형론에서 표현될 수 없기 때문이다.)

입장에서 볼 때, 한 형식체계에서의 형성 규칙은 그 체계에서의 문장들을 형성하는 규칙에 해당할 뿐이고 가능한 모든 (수학적) 명제들을 산출하는 규칙은 없다. 마틴뢰프의 유형론은 항상 새로운 명제나 집합이 도입될 수 있는 열린 체계이므로 이런 직관주의적 입장에 부합한다.

마틴뢰프에 의하면 러셀의 유형개념은 중의적인 것으로, ‘한 명제함수가 유의미하게 적용되는 영역이’라는 의미에서의 유형은 집합에 해당하며, 단순 유형론(simple type theory)에서의 명제들의 유형은 범주에 해당한다.[14] 그러나 범주가 단순 유형론의 유형에 해당한다는 점이 유형을 명시적으로 도입한 단형 유형론은 단순 유형론과 유사하다는 것을 함축하지 않는다. 단형 유형론에서도 양화는 집합에 한정된다.[15] 즉, 양화사의 영역은 귀납적으로 산출될 수 있는 전체에 한정된다. 단형 유형론은 다형 유형론과 마찬가지로 서술적(predicative) 이론이다.[16]

다형 유형론과 마찬가지로 단형 유형론의 판단들에는 정언적 판단과 가언적 판단이 있으며, 단형 유형론의 주요 정언적 판단형식들과 그런 판단들의 의미, 즉, 그런 판단들을 올바르게 내리기 위한 조건들을 나타내면 (표 1)과 같다.[17]

---

14) Martin-Löf, P. (1984), p. 22.

15) 이는 단형유형론에서 각각 보편양화사와 존재양화사의 역할을 하는 Π와 Σ의 유형에서 확인될 수 있다. Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), pp. 164-165를 볼 것.

16) 필자가 아는 한, 마틴뢰프는 왜 양화사의 영역이 (유형이 아니라) 집합에 한정되어야 하는 지에 대한 명시적인 논증은 제시하지 않았다. 이는 양화사의 의미와 비서술성(impredicativity)의 문제에 관한 깊은 논의를 필요로 한다.

17) (표 1)의 다섯 번째 판단인 ‘A true’는 ‘A exists’라는 판단의 특수 경우이다. 즉, A가 명제(집합)가 아닌 유형인 경우에도 ‘A exists’라는 판단은 가능하며, 그런 판단을 올바르게 하기 위한 조건은 특정한 a에 대해 그것이 유형 A의 대상임을 알아야 한다는 것이다.

(표 1)

정언적 판단 형식	일상적 표현	올바른 판단을 하기 위해 알아야 할 내용
A type	A는 한 유형이다	유형 A의 대상이기 위한 조건과 유형 A의 같은 대상이기 위한 조건
a:A	a는 유형 A의 (유형 A를 지니는, 유형 A에 포함되는) 대상이다. (a는 A이다.)	a가 유형 A의 대상이기 위한 조건을 만족한다는 점
a=b:A	a와 b는 유형 A의 같은 대상이다. (a와 b는 같은 A이다.)	a와 b가 유형 A의 같은 대상이기 위한 조건을 만족한다는 점
A=B type (혹은 A=B)	A와 B는 같은 유형이다.	유형 A의 대상들과 유형 B의 대상들은 같으며, 같은 유형 A의 대상들은 같은 유형 B의 대상들이라는 점
A true	명제 A는 참이다.	유형 A는 명제(집합)이고 A의 증명이(원소가) 있다는 점.

명제와 집합의 동등성 논제에 의해 명제들의 유형은 집합들의 유형과 같으므로,[18] ‘Prop=Set’이라는 단형 유형론의 공리가 정당화 되며, ‘집합 A의 원소들의 유형은 명제 A의 증명들의 유형과 같다’는 판단 ‘El(A)=Pf(A)’ 또한 쉽게 정당화된다. 다형 유형론에서의 판단들 a∈A와 a=b∈A는 각각 단형 유형론의 판단들 a:El(A)와 a=b:El(A)에 해당한다.

앞서 설명된 유형 개념을 따르면, 가언적 판단과 연관된 함수 유형을 도입할 수 있다. 예컨대 x가 유형 A의 대상이라는 가정 하에서 b가 유형 B의 대상이라는 가언적 판단(b:B [x:A])을 정당하게

18) 정인교 (2011) 2절을 볼 것.

할 수 있다는 것은, 직관주의적으로, 유형 A의 임의의 대상 a가 주어질 경우 b가 a에 적용된 결과인 b(a)는 유형 B(x:=a)의 대상이라는 것을 의미하며, 이는 곧 람다연산의 표기로는 'λx.b'이고 단형 유형론의 표기로는 '(x)b'에 해당하는 함수가 단형 유형론에서의 유형 (x:A)B, 즉, 유형 A의 대상에 적용되어 유형 B(x:=a)의 대상을 값으로 가지는 함수 유형의 대상이라는 판단을 정당하게 할 수 있다는 것을 의미한다.[19] 함수 유형 (x:A)B의 대상들은 유형 A의 임의의 대상 a에 적용되어 유형 B(x:=a)의 대상을 값으로 가지는 함수들이며, 그들 간의 동일성 조건은 유형 A의 같은 대상들 a, b에 적용될 경우 유형 B(x:=a)의 같은 대상을 값으로 가지는 함수는 유형 (x:A)B의 같은 대상이라는 조건에 해당한다. 이로부터 단형 유형론의 다음 규칙들이 정당화 된다.

(Fun Formation)

$$\frac{A\ \text{type} \quad B\ \text{type}\ [x:A]}{(x:A)B\ \text{type}} \qquad \frac{A_1=A_2 \quad B_1=B_2\ [x:A_1]}{(x:A_1)B_1=(x:A_2)B_2}$$

(Application)

$$\frac{c:(x:A)B \quad a:A}{c(a):B(x:=a)} \qquad \frac{c_1=c_2:(x:A)B \quad a=b:A}{c_1(a)=c_2(b):B(x:=a)}$$

(Abstraction)

$$\frac{b:B\ [x:A]}{(x)b:(x:A)B}$$

단형 유형론의 함수적 추상 연산자에 해당하는 ( )는 람다연산의 함수적 추상 연산자 λ와 유사하게 β-rule, ξ-rule, α-rule, η-rule에

[19] 여기서 B(x:=a)는 B에 나타나는 자유변항 x를 a로 대치한 결과를 나타낸다.

대응하는 규칙들에 의해 설명된다.[20] 지금까지 언급된 규칙들 이외에 단형 유형론은 일반적 규칙으로 동일성과 가정 및 유형족(family of types)에 관한 규칙들을 포함하며,[21] 이들은 모두 유형과 집합 개념에 의해 정당화될 수 있다.

단형 유형론에서의 집합론은, 집합 개념이 요구하는 대로, 정의하려는 집합의 표준적 원소들 및 그들 간의 동일성 조건을 규정함으로써 이루어진다. 다형 유형론에서 이런 규정은 겐첸(G. Gentzen)의 자연연역 체계에서의 도입규칙과 유사한 형태로 제시되었지만, 유형이 명시적으로 도입된 단형 유형론에서는 이런 규칙이 집합이나 집합연산자의 유형을 규정하는 것과 마찬가지가 된다. 공집합이나 자연수 집합 등은 집합 유형의 대상들이고, 집합을 명제로 간주할 경우 논리적 연산에 해당하는 집합 연산들은 함수 유형의 대상들이 된다. 두 가지 예를 들어보자.

앞서 언급된 다형 유형론의 자연수 도입규칙들 (N-Intro 1)과 (N-Intro 2)는 각각 다음과 같은 단형 유형론의 유형선언(type declaration)들에 해당한다.[22]

0:El(N)
succ:(El(N))El(N)

단형 유형론에서 (N-Intro 2)는 위에 규정된 succ의 유형과 (Application) 규칙 등에 의해 정당화된다.[23]

---

20) 이 규칙들에 대한 엄밀한 서술을 위해서는 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), p. 160을 볼 것.

21) Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), pp. 156-159을 볼 것.

22) 이 글에서 함수 유형에 관한 표현은 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990) p. 164의 약정을 따른다.

23) 다형 유형론의 (N formation) 규칙과 (N Elimination) 규칙에 대응하는 단형 유형론의 유형 선언은 각각 N:Set 및 natrec의 유형선언에 해당한다.

다형 유형론의 Π 규칙들[24]은 다음과 같은 단형 유형론의 유형선언들에 의해 정당화 된다.

$$
\begin{aligned}
&\Pi:(X:Set,\ (El(X))Set)Set\\
&\lambda:(X:Set,\ Y:((El(X))Set),\ (x:El(X))El(Y(x)))El(\Pi(X,Y)\\
&funsplit:(X:Set,\ Y:(El(Y))Set,\ Z:(El(\Pi(X,Y))Set,\ f:El(\Pi(X,Y)),\\
&\qquad d:(y:(x:El(X))El(Y(x)))El(Z(\lambda(X,Y,y))))El(Z(f))
\end{aligned}
$$

예컨대 보편양화 $(\forall x\in A)B(x)$를, A에 대한 집합족인 B의 데카르트 곱, 즉, Π(A,B)로 정의할 때, 보편양화사 도입규칙은 단형 유형론에서 다음과 같은 규칙에 해당한다. ‘A가 집합이고 B가 A의 원소들에 적용되는 명제함수일 때, b가 A의 증명 x에 적용되어 B(x)의 증명을 산출하는 연산이라면, λ(A,B,b)는 Π(A,B)의 증명이다.’ 이는 위에 정의된 λ의 유형에 의해 단형 유형론에서 (표 2)와 같이 도출된다. (‘$x\in A$’와 같은 표현은 ‘x:El(A)’와 같은 표현의 축약이다.)

(표 2)

$$
\dfrac{A:Set \qquad \dfrac{\dfrac{B(x):Set\ \ [x\in A]}{(x)(B(x)):(x\in A)Set}\,(1)}{B:(x\in A)Set}\,(2) \qquad \dfrac{b(x)\in B(x)\quad [x\in A]}{b:(x\in A)B(x)}\,(3) \qquad \lambda:\#}{\lambda(A,B,b)\in\Pi(A,B)}\,(4)
$$

(표 2)에서 #은 λ의 유형이며, 각 추론 단계에 대한 정당화는 다음과 같다. (1)은 (Abstraction)에 의해, (2)는 η-rule과 동일성에 관한 규칙 (substitution in types)에 의해, (3)은 (Abstraction)과 η-rule

Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), p. 167을 볼 것.

24) 정인교 (2011), (표 5)를 볼 것.

및 동일성에 관한 규칙 (substitution in types)에 의해, (4)는 (Application)을 세 번 적용하여 얻어진다.[25] 유사한 방법으로, 다형 유형론의 (Π-formation) 규칙은 Π의 유형에 의거하여 정당화 되고, (Π-elimination) 규칙은 funsplit의 유형에 의거하여 정당화 된다.[26]

다형 유형론의 구성자 λ와 단형 유형론의 구성자 λ를 비교하면, 전자는 일항 연산자인데 반해, 후자는 삼항 연산자라는 차이가 드러난다. 다형 유형론의 보편양화사 도입규칙 (Π-introduction 1)은 다음과 같이 서술될 수 있다. ‘A가 집합이고 B가 A의 원소들에 적용되는 명제함수일 때, b가 A의 증명 x에 적용되어 B(x)의 증명을 산출하는 연산이라면, λ(b)는 Π(A,B)의 증명이다.’ 다형 유형론의 λ(b)는 b가 적용되는 x가 어떤 유형의 대상이며 b(x)가 어떤 유형의 대상인지에 따라, 즉, A와 B가 어떤 유형들인지에 따라, 그 유형이 달라진다. 예컨대 λ(b)는, A가 N이고 B가 (x)N인 경우 유형 Π(N,(x)N)의 대상이고, A가 Π(N,(x)N)이고 B가 (x)N인 경우 유형 Π(Π(N,(x)N),(x)N)의 대상이다.[27] 이런 점은 다형 유형론의 다른 많은 항들에도 마찬가지로 적용된다. 반면에 단형 유형론의 λ(A,B,b)는 오직 하나의 유형을 지닌다. 예컨대 λ(N,(x)N,b)는 오로지 유형 El(Π(N,(x)N))의 대상일 뿐이다. 이런 점은 단형 유형론의 다른 항들에도 마찬가지로 적용된다.

두 이론의 이런 차이는, ‘다형 유형론’과 ‘단형 유형론’이란 명칭이 드러내듯이, 중요한 귀결을 지닌다. 우선 ‘수학적 대상은 항상

---

25) 이 규칙들에 대한 서술을 위해서는 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), pp. 158-160을 볼 것.

26) 다형 유형론의 (Π-introduction 2)와 (Π-equality)는 위의 유형 선언과 동일성에 관한 일반규칙에 의해 정당화된다. 이 점은 위에 언급된 N의 다른 규칙들에 대해서도 마찬가지로 적용된다. 실제로 단형 유형론에서도 동일성에 관한 일반 규칙들이 주어지면 이런 규칙들이 따로 도입될 필요는 없다.

27) 이 문장과 이 직전 문장에서의 ‘유형’은 다형 유형론에서의 유형, 즉 ‘집합’의 의미로 이해되어야 한다.

어떤 특정한 유형의 대상이다'는 마틴뢰프의 논제는[28] 다형 유형론보다 단형 유형론에서 철저히 준수된다. 이런 점에서 단형 유형론이 다형 유형론보다 더 기본적인 이론으로 간주될 수 있다. 단형 유형론은 또한, 특정한 유형의 집합(명제)이나 연산자(논리상항)에 관한 정의를 통해, 여러 논리체계를 제시하는 틀의 역할을 수행할 수 있다.[29] 두 이론의 실질적으로 중요한 차이는 λ(b)와 λ(A,B,b)의 예에서 드러나듯이, 단형 유형론의 항들은 다형 유형론의 항들보다 더 많은 정보를 포함하고 있다는 점이다. 따라서 항을 증명대상으로 간주할 때, 단형 유형론의 항들은 다형 유형론의 항들 보다 더 많은 정보를 포함하는 증명대상들에 해당하게 된다.

계산적 측면에서 볼 때, 단형 유형론의 항이 그에 대응하는 다형 유형론의 항에 비해 추가적으로 포함하는 정보는 크게 유용하지 않은 경우가 많다. 오히려, 전산학적 입장에서 볼 때, 예컨대 항을 프로그램으로 간주할 때, 단형 유형론의 항은 프로그램의 복잡성을 불필요하게 증대시킨다. 그럼에도 불구하고, 단형 유형론은 이론적으로 더 기본적인 것으로, 그 항들이 포함하는 정보는 중요한 이론적 함축을 지닌다. 예컨대 단형 유형론의 항은 그 유형에 관한 완전한 정보를 지닌다. 특히 그 항이 특정 명제의 증명에 해당할 경우, 증명된 명제를 포함하여 증명에 대한 완전한 정보를 지닌다. 이런 점에 의거해 단형 유형론의 a:A 및 a=b:A와 같은 형식의 판단들은 결정가능하다는 사실이, 즉 그런 형식의 임의의 판단이 단형 유형론에서 도출가능한지 여부가 효과적으로 결정될 수 있다는 사실이 입증될 수 있다.[30]

---

28) 주석 5)를 볼 것.

29) 이런 틀은 전산학적 문헌에서 'logical framework'로 알려져 있다. Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (2000)에 언급된 참고 문헌을 볼 것.

30) 단형 유형론은 다형 유형론보다 이론적으로 우선하는 것으로 여겨질 수 있

2. 분석판단과 종합판단

다음은 분석/종합의 구분에 관한 한 통상적인 설명이다.

> “분석적” 문장들은 ...... 오로지 그것들을 구성하는 단어들의 의미들에 관한 지식에 의거해 참임을 알 수 있는 문장들이며, “종합적” 문장들은 ...... 단어들의 의미들과 함께 세계에 관한 어떤 지식에 의해 참임을 알 수 있는 문장들이다.[31)]

마틴뢰프에 의하면, ‘분석판단’에 관한 그의 다음 설명들은 이런 통상적인 설명과 별로 다를 바가 없다.

> ...... 분석적, 혹은 설명적 판단들은 오로지 개념적 분석에 의해 명백하게 되는 판단들, 즉, 그 증거들이 개념적 분석에만 의존하는 판단들이다. ...... 분석판단은 그 판단에 나타나는 항들의 의미들에 의거해 명백하게 되는 판단이다 ...... 종합판단은 그것을 확신하기 위해서는 그 판단 자체 밖으로 나아가야 하는 판단이다[32)]

지만, 다형 유형론이 단형 유형론의 항들에서 명제들에 관한 정보를 제거함으로써 얻어질 수 있는 것은 아니다. Salvessen (1989)을 볼 것.

31) Rey, G. (2008). ““Analytic” sentences, such as “Ophthalmologists are doctors,” are those whose truth seems to be knowable by knowing the meanings of the constituent words alone, unlike the more usual “synthetic” ones, such as “Ophthalmologists are ill-humored,” whose truth is knowable by both knowing the meaning of the words and something about the world.”

32) Martin-Löf, P. (1994), pp. 88-89. “...... analytical, or explicative, judgements are those that become evident merely by conceptual analysis, that is, they are those whose evidence rests upon conceptual analysis alone. .... an analytic judgement is one which is evident in virtue of the meanings of the terms that occur in it. ...... a synthetic judgement is one which is such that you have to go beyond the judgement itself in order to convince yourself of it, ...”

그러나 위의 두 설명이 별로 차이가 없는 것으로 이해되기 위해서는, 몇 가지 사항들이 전제되어야 한다. 즉, 분석/종합 구분의 적용 대상은 판단이라는 점과 명제에 적용되는 직관주의적 진리개념 및 올바른 판단의 기준에 관한 마틴뢰프의 견해가 전제되어야 한다.

우선 분석/종합 구분은 통상적으로 진리, 명제, 진술, 판단, 문장 등 다양한 것들에 적용된다. 진리값의 담지자를 명제로 간주한다면, 분석적 진리와 종합적 진리의 구분은 곧 분석적으로 참인 명제와 종합적으로 참인 명제들 간의 구분이 될 것이다. 콰인(W. Quine)은 명제 개념은 분석/종합의 구분과 같은 문제를 지닌다고 여겼다. 콰인의 견해를 수용하지 않더라도 명제 개념을 의심하는 이들은, 분석/종합의 구분이 가능하다면, 이는 우선적으로 문장과 같은 언어적 대상들에 적용된다고 할 것이다. 마틴뢰프는 명제 개념에 문제가 있다고 여기지는 않는다. 직관주의적으로 어떤 명제는 (그 명제의) 증명들의 집합과 같다. 그러나 마틴뢰프는, 칸트(I. Kant)와 마찬가지로, 분석/종합의 구분은 명제들이 아니라 우선적으로 판단들에 적용된다고 여긴다. 이런 관점에서는, 일상적인 문장들은 때로는 명제를 나타내기 위해 사용되고 때로는 판단을 나타내기 위해 사용되므로, 분석/종합의 구분을 우선적으로 문장들에 적용하면 혼동이 야기될 수 있다.[33] 직관주의적 유형론에서 명제와 판단의 구분은 가장 기초적이고 중요한 구분에 속한다.[34] 명제는 논리상항이

---

33) ‘판단’이란 용어도 애매성으로부터 자유롭지는 못하다. 이는 판단 행위(act)를 의미할 수도 있고, 그런 행위의 산물(product)을 의미할 수도 있다. 마틴뢰프는 이런 구분을 세밀하게 하지만, 분석/종합 구분의 적용 대상이 어떤 의미의 판단인지 명시적으로 밝히지는 않는다. 통상적인 구분과 크게 어긋나지 않으려면, 그의 구분은 잠재적인 판단 행위의 산물들에 우선적으로 적용된다고 해야 할 것이다. Martin-Löf, P. (1987) pp. 417-418 및 Martin-Löf, P. (1991) p. 144 참조.

34) 정인교 (2011) 5절 참조.

적용되는 대상이고, 판단은 추론의 단위이다. 통상적인 추론, 예컨대 전건긍정규칙은, 명제 A⊃B와 명제 A로부터 명제 B로의 나아가는 것이 아니라, 명제 A⊃B가 참이라는 판단 'A⊃B true'와 명제 A가 참이라는 판단 'A true'로부터 명제 B가 참이라는 판단 'B true'로 나아가는 것으로 여겨져야 한다. 마틴뢰프가 분석/종합의 구분을 우선적으로 판단에 관한 구분으로 간주하는 것은, 명제 개념이 의심스러워서가 아니라, 판단은 추론을 구성하는 인식의 기본 단위이며,[35] 분석/종합의 구분은 의미론적 구분이자 인식론적 구분으로 여겨지기 때문일 것이다.[36]

A가 명제일 때, A가 참이라는 판단 'A true'의 의미는 (표 1)에 나타나있는 바와 같이 그 판단을 올바르게 하기 위한 조건에 의해 설명되며, 그 조건은 A의 증명이 있다는 것, 즉 유형 Pf(A)의 대상이 있다는 점을 알아야 한다는 것이다. 이 조건이 만족될 때, 명제 A가 참이라는 판단은 명백하게(evident) 된다.[37] 이와 같이 직관주의적 유형론에서, 명제는 그 증명조건, 즉, 그 명제의 표준적 증명대상이 무엇인가에 의해 그 정체(identity)가 결정되는 대상이며, 판

---

35) 마틴뢰프에 의하면 판단 행위는 곧 인식 행위(to judge is to know)이다. 예컨대 Martin-Löf, P. (1996), p. 19를 볼 것.

36) 직관주의적 견해를 따르면, 의미론과 인식론은 서로 의존적이라고 할 것이다.

37) Martin-Löf, P. (1987) 참조.. 이 글에서는 통상적인 번역을 따라 'evident'와 'evidence'의 번역어들로 각각 '명백한'과 '증거'를 사용하지만, 마틴뢰프가 의도하는 'evident'와 'evidence'는 이들 한글 단어들이 지니는 통상적 함의를 지닌다고 할 수 없다. 특히 '명백한'이란 한글 단어는 사소하거나 증거 혹은 정당화가 필요 없다는 함의를 지닐 수 있지만, 마틴뢰프의 'evident'는 그런 함의를 지닌다고 할 수 없으며, '근거 혹은 증거(evidence)를 지닌 (것으로 드러나는)'과 유사한 의미로 이해될 수 있을 것이다. 'evidence'도 귀납적 증거가 아니라, 연역적 정당화의 근거로 이해되어야 할 것이다. 이들 단어들에 대한 마틴뢰프의 용법은 브렌타노(F. Brentano)나 후설(E. Husserl)의 용법들과 유사하다.

단은 그 판단을 올바르게 내리기 위한 알아야 할 조건, 즉, 그 판단의 증거(evidence)가 무엇인가에 의해 그 의미가 설명된다. 명백한 판단이 되기 위해서는 그 판단에 대한 증거를 가지고 있어야 한다. 이에 따라, A가 명제임을 안다면, ‘A true’란 판단의 증거는, 어떤 특정한 증명대상 a가 A의 증명이라는 판단인 ‘a:Pf(A)’가 된다. a:Pf(A)로부터 A true로의 추론, 혹은 보다 일반적으로 a:A로부터 A exists로의 추론은 이런 의미 설명에 의해 정당화되는 직관주의적 유형론의 기본 규칙이다.

문장이 판단을 나타내는 것으로 간주하고, 마틴뢰프의 진리 개념 및 올바른 판단, 즉, 명백한 판단의 기준을 받아들인다면, ‘분석판단은 그 판단에 나타나는 항들의 의미들에 의거해 명백하게 되는 판단이다’는 마틴뢰프의 설명과 ‘“분석적” 문장들은 오로지 그것들을 구성하는 단어들의 의미들에 관한 지식에 의거해 참임을 알 수 있는 문장들이다’는 레이(G. Rey)의 설명은 별로 다를 바가 없어 보인다. 그러나 이 경우에도 종합판단에 대한 이들의 설명에는 여전히 차이가 있다. 마틴뢰프는 ‘종합판단은 그것을 확신하기 위해서는 그 판단 자체 밖으로 나아가야 하는 판단이다’라고 말하는 데 비해 레이는 ‘종합적 문장들은 단어들의 의미들과 함께 세계에 관한 어떤 지식에 의해 참임을 알 수 있는 문장들이다’라고 말한다. 중요한 점은, 올바른 종합판단을 내리기 위해서는 그 판단 밖에서 증거를 찾아야 하지만, 그런 증거가 모두 세계에 관한 어떤 지식에 해당하는지 여부이다. ‘세계에 관한 어떤 지식’이 모두 감각에 토대한 경험적 지식에 해당한다면, 종합판단에 관한 레이의 규정은 마틴뢰프의 입장에서 볼 때 지나치게 편협하여 부적절한 것이 된다. 뿐만 아니라, 이는 칸트가 종합판단이란 개념을 도입하여 해결하려했던 문제, 즉 ‘선천적 종합판단이 어떻게 가능한가?’란 질문을 사소하게 불가능하게 만든다. 마틴뢰프는 경험적 지식과 달리 수학

적 지식은 개념의 구성에 의해 획득되는 선천적 종합판단이라는 칸트의 견해가 기본적으로는 옳다고 주장한다. 이 주장을 검토하기 전에 먼저 직관주의적 유형론에서의 판단들 중 어떤 것들이 분석판단이나 종합판단에 해당하는 지 살펴보자.

마틴뢰프는 (표 1)에 나타난 정언적 판단형식들 중 a:A와 a=b:A는 분석판단이며 A true는 종합판단이라고 주장한다.[38] 예컨대, $N:Set$, $3^5:El(N)$, $3x3=5+4:El(N)$, $\Pi(N, \Sigma(N,(x)N)):Prop$, $\lambda(N,\Sigma(N,(x)N),(x)<N,(x)N,x,x>):Pf(\Pi(N,\Sigma(N,(x)N))$ 등은 분석판단이고, $\Pi(N,\Sigma(N,(x)N))$ true, $N\supset\neg\neg N$ true 등은 종합판단에 해당한다.[39] 마틴뢰프에 의하면, 위의 두 형식의 판단들이 분석판단인 이유는, 그런 판단이 명백하다면, 오로지 그 판단에 나타나는 항들의 의미들에 의거해 명백하기 때문이다.[40] 예컨대 N이 집합이라는 첫 번째 판단 N:Set은 (표 1)의 의미 설명에 의거해 N이 유형 Set의 대

---

38) Martin-Löf, P. (1994), p. 93. “Whatever type α that we choose, the two forms of judgements a:α and a=b:α are both analytic.” 마틴뢰프는 ‘A type’ 및 ‘A=B type’의 형식에 대해서는 명시적으로 밝히지 않지만, 이들 형식의 판단들도 분석판단에 해당하는 것으로 여겨질 수 있을 것 같다.

39) 덧셈, 곱셈, 지수함수 등의 원초적 회귀함수(primitive recursive function)들은 모두 구성자 succ과 선택자 natrec에 의해 정의될 수 있다. (Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), p. 70 참조.) 다섯 번째 판단$\Pi(N,\Sigma(N,(x)N))$ true는 정인교 (2011) p. 59 (표 6)의 다형유형론에서의 도출을 단형유형론에서의 도출로 변형하면, ‘올바른’ 분석판단임을 알 수 있다. 그렇지 않은 경우, 이는 ‘잘못된’ 분석판단이다. (다음 주석 참조..) ⊃ 와 ¬ 등의 통상적 논리상항들은 다형 유형론에서와 마찬가지로 Π와 { }등에 의해 정의된다. (정인교 (2011) pp. 48-49 참조.)

40) Martin-Löf, P. (1994), p.93. “If a judgement of one of these two forms is evident at all, then it is evident solely by virtue of meanings of the terms that occur in it.” 분석판단에 대한 이 설명은 앞서 인용된 그의 설명과 약간의 차이가 있다고 여겨질 수도 있다. 즉, 이런 두 형식의 판단들 중 잘못된 판단, 즉 명백하지 않은 판단은 이 설명에 따르면 ‘잘못된’ 분석판단이지만, 앞선 설명에 따르면 분석판단이 아니라고 여겨질 수도 있다. ‘잘못된’ 분석판단도 허용하는 것이 보다 자연스러울 것이다.

상이기 위한 조건을 만족한다는 점을 알아야 명백한 판단이 된다.[41] 1절에 설명된 Set의 의미에 의해 N이 유형 Set의 대상이기 위한 조건은 N의 표준적 원소들 및 그들 간의 동일성 조건에 해당하며, 이는 곧 0와 succ의 유형선언들 혹은 N 도입규칙들에 해당한다. 이와 유사하게 다른 네 판단들도 오로지 각 판단에 포함된 항들의 의미들에 의해 명백하게 될 수 있으므로 분석판단에 해당한다. 특히, A가 명제일 때, 어떤 구성 a가 A의 증명이라는 판단 a:Pf(A)가 분석판단이라는 점은 주목할 만하다. 마틴뢰프에 의하면 수학의 정리들은 단순히 A true 형식의 판단, 예컨대 ‘소수는 무한히 많다는 명제는 참이다’는 판단이 아니라, 어떤 특정한 구성(증명대상)이 A의 증명이라는 a:Pf(A) 형식의 판단, 예컨대 ‘임의의 소수가 주어졌을 때 그 소수보다 더 큰 소수를 산출하는 연산의 구성은 소수는 무한히 많다는 명제의 증명이다’는 판단에 해당한다. 따라서 수학의 정리들은 분석판단에 해당한다.

그러나 수학의 중요한 판단들이 모두 이런 분석판단에 속하는 것은 아니다. ‘소수는 무한히 많다는 명제는 참이다’, ‘연속체 가설은 참이다’, ‘연속체 가설의 부정은 참이다’는 판단들과 같이 많은 흥미로운 수학적 판단들이 A true 형식에 속한다. 특히, 통상적인 논리법칙들, 예컨대 ‘A⊃¬¬A는 참이다’, ‘A⊃(B⊃A&B)는 참이다’ 등은 모두 이런 형식이다. 이런 A true 형식의 판단들, 보다 일반적으로 A exists 형식의 존재 판단들은 모두 종합판단에 해당한다는 것이 마틴뢰프의 주장이다. 앞서 설명한대로, 명제 A가 참이라는 판단 A true는 A의 증명대상이 있다는 판단 Pf(A) exists에 해당한다. 이런 판단은 그것이 명백한 경우에도 오로지 그 판단에 속한 항들의 의미들에 의거해 명백하게 되지는 않기 때문에 종합판

41) 집합이 유형이라는 판단 ‘Set type’의 ‘Set’과 ‘type’의 의미들에 의거한 정당화를 위해서는 1절을 볼 것.

단에 해당한다는 것이다. 이런 존재 판단을 명백하게 만들기 위해서는 유형 Pf(A)의 대상, 즉, A의 증명을 구성하여야 한다. 그러나 그런 증명대상은 ‘a:Pf(A)’라는 판단에는 포함되어 있지만, (이로부터 추론되는) ‘A true’라는 판단에는 포함되어 있지 않다. 따라서 ‘A true’라는 판단은, 이를 명백하게 만들기 위해서는 그 판단에 포함된 항들의 의미들에 관한 분석만으로 충분하지 않고 그 판단 밖에 있는 증명대상을 구성해야하기 때문에, 종합판단에 해당한다는 것이다.

마틴뢰프 자신이 드는 예를 검토해 보자. A와 B가 명제일 때, 명제 A⊃(B⊃A&B)가 참임이 명백해지기 위해서는 겐첸의 자연연역 체계에서는 (표 3)의 ①과 같은 구성을 필요로 한다.

(표 3)

①	②
(1) (2) A B A&B (2) B⊃A&B (1) A⊃(B⊃A&B)	x∈A [x∈A] y∈B [y∈B] &I(A,B,x,y)∈A&B [x∈A, y∈B] ⊃I(B,A&B,(y)&I(A,B,x,y))∈B⊃A&B [x∈A] ⊃I(A,B⊃A&B,(x)⊃I(B,A&B,(y)&I(A,B,x,y))∈A⊃(B⊃A&B)

①과 같은 구성은 비록 단순한 것이라 할지라도, 명제 A⊃(B⊃A&B)는 참이라는 판단, 즉 명제 A⊃(B⊃A&B)의 증명이 있다는 판단에 포함된 개념의 분석만으로 이루어지는 것이 아니라 재간(ingenuity)을 필요로 한다는 것이 마틴뢰프의 주장이다.[42] 주의해야 할 점은, 마틴뢰프를 따르면, ‘A⊃(B⊃A&B)의 증명이 있다’는 판단은 종합판단이지만, ‘구성 ①은 A⊃(B⊃A&B)의 증명이다’는

[42] Martin-Löf, P. (1994), p. 96.

판단은 분석판단이라는 것이다. 두 번째 판단은 곧 (표 3)의 단형 유형론에서의 도출 ②의 결론에 해당하는 판단이기 때문이다.[43)]

여기서 ②의 결론에 해당하는 판단이 명백하게 되기 위해서는 ②와 같은 도출을 필요로 하므로 상황이 다를 것 없지 않느냐는 이의가 제기될 수 있다.[44)] 이에 대해 다음과 같은 답변이 있을 수 있다. 증명대상 ⊃I(A,B⊃A&B,(x)⊃I(B,A&B,(y)&I(A,B,x,y))를 찾는 일은 'A⊃(B⊃A&B)의 증명이 있다'는 판단에 포함된 개념들의 분석만으로 이루어지지 않지만, 그 증명대상이 A⊃(B⊃A&B)의 증명이라는 판단은 오로지 그 판단에 포함된 개념들의 분석에 의해 명백해 진다는 것이다. 실제로 ①을 구성하기 위해서는 특정한 명제들에 특정한 연산(규칙)들을 특정한 순서로 적용해야한다. 이런 정보는 'A⊃(B⊃A&B)의 증명이 있다'는 판단 자체에 포함되어있지 않다. 그러나 일단 ⊃I(A,B⊃A&B,(x)⊃I(B,A&B,(y)&I(A,B,x,y))와 같은 구성이 명시적으로 주어지면, 그것이 A⊃(B⊃A&B)의 증명이라는 판단은 오로지 그 판단에 포함된 개념들에 의해 명백해진다는 것이다.

43) (표 3)의 ②에서 a∈α라는 형식의 표현은, 앞서 설명된 대로, a:Pf(α)라는 형식의 표현을 줄인 것이다. 또한 여기서 단형유형론의 구성자들 < >과 λ는, Martin-Löf, P. (1994)를 따라, 각각 &I과 ⊃I로 표기되었다.

44) 프라위츠는 이와 유사한 비판을 '직관주의적으로 인식적 중요성(epistemological significance)은 추상적인 수학적 대상인 (명제의) 증명대상에 있는 것이 아니라, 판단의 입증(demonstration)에 있다'는 마틴뢰프와 준홈의 주장에 대해 제기한다. "To require that the knowledge is made explicit in the form of a demonstration is an understandable move but seems to come close to starting an infinite regress: why should we then not also require a (meta-) demonstration of the correctness of the demonstration?" (Prawitz (2000), p. 327.) 프라위츠의 비판에 대한 답변은 '추론은 명제들이 아니라 판단들 간의 이행이며, 판단이 인식의 기본단위이다'는 직관주의적 유형론을 뒷받침하는 기본 논제와 관련해 모색되어야 할 것이다.

그러나 이런 답변은 ‘주어진 판단에 포함된 개념들의 분석’이란 용어를 너무 편협하게 이해한 것이 아니냐는 재반론이 있을 수 있다. (표 3)의 증명 ①을 구성하기 위해 필요한 규칙들인 겐첸의 ⊃I 규칙과 &I 규칙은 각각 ⊃와 &의 의미를 규정하는 것으로 여겨질 수 있지 않는가? 예컨대 덤밋(M. Dummett)과 프라위츠(D. Prawitz)의 의미론적 기획이 성공적이라면, 겐첸의 도입규칙들은 도입된 논리상항들의 의미를 규정하고 제거규칙들은 그렇게 규정된 의미에 의해 정당한 규칙들이므로,[45] (표 3)의 증명 ①을 구성하기 위해 A⊃(B⊃A&B)에 포함된 개념들의 분석이외의 것이 필요한가? 위의 답변을 고수하자면, 이런 질문들에 대해 다음과 같은 답변이 시도될 수 있다. 덤밋과 프라위츠의 기획이 성공한다고 하더라도 그것이 보이는 것은 겐첸의 규칙들이 논리상항의 의미에 의해 정당하다는 것뿐이다. 그렇지만 (표 3)의 증명 ①을 구성하기 위해서는, 이런 규칙들을 특정한 명제들에 특정한 순서로 적용해야 하는 데 이 점은 ‘A⊃(B⊃A&B)의 증명이 있다’는 판단에 포함된 개념의 분석에 의해 결정되는 것은 아니다.

이런 답변에 대해 일견 다음과 같은 반론이 다시 제기될 수 있을 것이다. A⊃(B⊃A&B)의 표준적 증명대상은 ①과 같은 정형연역(normal deduction)에 해당하는 것으로 간주될 수 있고, 직관주의적 일차논리에서 타당한 문장의 정형연역을 찾기 위해서는 그 문장에 포함된 논리상항에 관한 규칙만을 사용하는 것으로 충분하다.[46] 나아가 이들 규칙들을 어떤 명제들에 어떤 순서로 적용해야 하는지의 문제는 그 명제의 구조에 의해 결정되는 것 아닌가? 직관주의 일차논리에서 타당한 임의의 명제가 주어질 경우, 그 명제의 논리적 구조에 의해 그 명제의 표준적 증명을 찾는 절차가 있

---

45) 예컨대 정인교 (2003)을 볼 것.

46) Prawitz (1971) 참조.

을 것이라는 추측은 일견 그럴듯해 보인다.[47] 그러나 다음 장에서 고려될 괴델의 정리에 의해 이런 추측이 모든 수학적 명제에 적용될 수는 없다. G가 일차 페아노 산수에서의 괴델 문장이고, G의 이차 페아노 산수에서의 증명을 a라 한다면, a는 G에 나타난 표현들에 관한 규칙들만으로는 얻어질 수 없는 것이다. 따라서 임의의 참인 단형 유형론의 명제에 대해 그 명제의 논리적 구조에 의해 그 명제의 표준적 증명을 찾는 절차가 있을 것이라는 추측은 옳지 않다.

그렇다면 마틴뢰프의 두 주장들, 즉, '통상적인 논리법칙들은 종합판단들이다'는 주장과 '흥미로운 수학의 판단들은 종합판단들이다'는 주장들은 모두 정당한가? 여전히 가능한 한 대안은 논리와 수학의 구분에 관한 한 제안에 의존한다. 마틴뢰프가 의도한 흥미로운 수학적 판단들은 A exists 혹은 A true와 같은 존재 판단들이다. 괴델의 증명에 의해, 어떤 명제 G가 참이지만 'G true'란 판단에 포함된 개념들의 분석만으로는 G가 참임을 보이는 증명대상을 구성할 수 없다는 점은 명백해 보이므로, 마틴뢰프의 두 번째 주장은 일정 부분 수용되어야 할 것으로 보인다. 그런데 마틴뢰프는 자신의 두 주장들의 논거를 오로지 통상적인 논리법칙들과 흥미로운 수학의 판단들은 A exists 혹은 A true와 같은 존재 판단들이라는 점에서만 찾는다. 그러나 앞 단락에서의 논의가 옳다면, 논리적 추론규칙들이 논리상항의 의미에 의해 정당하다는 논제를 전제할 때, A exists 혹은 A true와 같은 존재 판단들 중에도 분석판단으로 여

---

47) 실제로 형식체계의 증명들은 효과적으로 열거 가능하므로, 그 형식체계가 완전하다면 그 형식체계에 속하는 임의의 타당한 문장에 대한 증명은 효과적으로 찾을 수 있다. 이런 절차는 물론 증명절차(positive proof procedure)에 해당할 뿐, 결정절차(decision procedure)에 해당하지는 않는다. (직관주의적 명제논리는 물론 결정가능하다.) 직관주의적 일차논리의 완전성에 대한 논란이 있지만, 이를 가정할 때, 그 증명절차에 의거해서도 여기 언급된 추측이 옹호될 수 있을 것이다.

겨질 수 있는 판단들이 있다. 즉, A true와 같은 존재 판단들 중에서도, 그 판단이 옳은 경우, 그 판단이 명백하게 되기 위해 필요한 A의 증명대상의 구성이 (A의 논리적 구조에 관한 분석을 포함한) '넓은' 의미에서 A에 포함된 개념들에 대한 분석만으로 얻어질 수 있는 판단들이 상당히 있다는 것이다. 이런 판단들만을 논리적으로 타당한 판단으로 간주한다면, '통상적인 논리법칙들은 종합판단이다'는 마틴뢰프의 주장은 수용될 필요가 없을 것이다. 필자는 이런 입장이 (통상적인) 논리법칙들이 분석적 진리라는 논제를 고수하기 위한 미봉적 고육지책에 불과하다고 생각하지는 않는다. 오히려 이는 논리적 진리는 분석적 혹은 개념적 진리라는 통상적 논제를 엄밀히 하는 한 방식이 될 수 있다.[48] 즉, 이는, '개념적 분석'의 외연을 보다 정확히 하는 한 방식을 포함하며, 논리적 진리들은 그런 의미의 개념적 분석을 넘어서는 (수학적) 구성에 의존하지 않는 진리라는 점을 분명히 함으로써, 통상적인 논제를 보다 분명히 하는 한 방식으로 여겨질 수 있을 것이다.[49]

---

48) 분석/종합은 우선적으로 판단에 적용되며, 참/거짓은 명제에 적용된다는 마틴뢰프의 관점에서 볼 때, '명제 A가 분석적 진리이다'란 표현은 부적절하지만, 이 표현은 이 맥락에서 'A에 포함된 개념들에 관한 분석에 의해 A의 증명대상이 효과적으로 구성될 수 있다'는 것, 즉 'A에 포함된 개념들에 관한 규칙들과 A의 논리적 구조에 의해 A의 증명대상을 효과적으로 찾을 수 있다'는 의미로 이해될 수 있을 것이다. '효과적(effective)'이라는 조건을 배제하는 것이 통상적인 '분석성'의 의미에 더 부합하지 않느냐는 지적이 제기될 수 있지만, 마틴뢰프의 논지는 그런 의미의 '분석성'이 잘못되었다는 논지를 포함하는 것으로 여겨질 수 있다.

49) 한 심사자는 이런 입장이 괴델문장(만)이 흥미로운 수학적 문장이라는 점을 함축하며 '괴델현상' 혹은 효과적인 증명절차의 존재여부를 분석/종합 구분의 기준으로 삼는다는 점에서 문제가 발생할 수 있다고 주장하였다. 이 주장을 자세히 논의하자면 긴 지면이 필요하지만, 우선 간단한 답변은 여기서 고려되는 입장은 괴델문장(만)이 흥미로운 수학적 문장이라는 것을 함축하지 않으며, '괴델현상' 혹은 효과적인 증명절차의 존재여부가 분석/종합의 구분의 가장 중요한 기준이라거나 유일한 기준이라는 점을 함축하지도 않

그러나 이런 입장을 발전시키기 위해서는 두 가지 과제가 해결되어야 한다. 첫째는 논리적 추론규칙들이 논리상항의 의미에 의해 정당하다는 논제의 정당화이고, 둘째는 그 표준적 증명대상이 그 논리적 구조에 의해 결정되는 명제들의 범위를 결정하는 일이다. 두 번째 과제에 대한 탐구 결과, 분석적 진리의 범위가 통상적인 논리법칙들보다 크게 축소된다면, 이런 입장을 고수하기 위해서는 논리적 진리는 분석적이라는 통념을 버려야 할 것이다. 필자는 마틴뢰프의 유형론 자체가 첫 번째 과제에 관한 해결에 큰 진전을 가져온다고 생각한다. 그렇다고 하더라도, 두 번째 과제는 여전히 사소하지 않은 증명론적 문제로 남아있다.

요약하자면, 마틴뢰프가 통상적인 논리법칙이 종합판단에 해당한다는 놀라운 주장을 하는 이유는, 이들은 A true, 즉, Pf(A) exists 라는 존재판단이어서, 이들이 명백하게 되기 위해서는 A의 증명대상을 구성해야 하지만, 그런 증명대상의 구성을 위해서는 A에 포함된 개념의 분석만으로는 충분하지 않다고 여기기 때문이다. 만약 위에 제시된 최종 비판을 발전시켜 통상적인 논리법칙들의 증명들은 '넓은' 의미의 개념적 분석에 의해 구성될 수 있다는 점을 입증할 수 있다면, 이들을 분석판단으로 간주할 것인지 종합판단으로 간주할 것인지의 문제는 기껏해야 '주어진 판단에 포함된 개념들의 분석'이란 용어를 어떻게 이해할 것인가에 의존하는 비교적 사소한 언어적 문제에 해당하며, 논리법칙은 분석적이라는 통념을 위협하지 않는다. 그러나 그 경우에도, 수학적 판단들이 모두 분석적이라는 입장은 유지되기 힘들다. 최종 비판의 정당성 여부에 상관없이, 마틴뢰프의 분석/종합 구분은 우리의 논리적 지식과 수학적 지식에 관해 중요한 사실을 드러낸다.

는다는 것이다. 특히 이 맥락에서 괴델정리와 관련해 중요한 점은 (직관주의적 의미론에서의) 보존적 확장의 문제이다. 이런 점에서 여기서 고려되는 제안은 정인교 (1999) 4절의 제안과 밀접히 관련된다.

3. 결정불가능성과 불완전성

마틴뢰프를 따르면 분석판단에 해당하는 a:A 및 a=b:A 형식의 판단들과 종합판단에 해당하는 A true 형식의 판단들은 논리적 특성에서 중요한 차이를 드러낸다. 즉, 결정불가능성(undecidability)과 불완전성(incompleteness)은 바로 종합판단의 특성에 기인한다는 것이다. 마틴뢰프에 의하면, 분석판단의 논리는 결정가능하고 완전하지만 종합판단의 논리는 결정불가능하고 불완전하며, 이런 결정불가능성과 불완전성은 'A true'라는 판단이 A의 증명대상을 은폐한 'Pf(A) exists'라는 존재판단이라는 점에 기인한다.[50]

'a:A' 및 'a=b:A'라는 형식의 판단들이 단형 유형론에서 결정가능하다는 사실은 앞서 설명한 바와 같다. 단형 유형론의 항들은 그 유형에 관한 정보를 모두 포함하고 있으며, 분석판단에 속하는 두 형식의 판단들의 결정절차는 기본적으로 전산학에서 항들의 유형을 결정하는 앨고리듬에 해당한다.[51] a:Pf(A) 형식의 판단이 결정가능하다는 점은 특히 직관주의적 의미론과 관련하여 중요한 의의를 지닌다. 임의의 명제 A와 임의의 구성 a에 대해 a가 A의 증명인지 아닌지는 a와 A에 포함된 개념에 의해 명백하게 될 수 있어야 할 것이다.[52] 특히 임의의 명제 A와 임의의 구성 a에 대해 a가 A의 증명인지 아닌지는 효과적으로 인지될 수 있어야 한다는 요구조건은 직관주의적 의미론의 인식론적 특성에 부합하는 조건으로 여겨

50) Martin-Löf, P. (1994), pp. 97-98. 주석 17)에 언급된 바와 같이, 마틴뢰프는 보다 일반적으로 A가 (특정 명제의 증명들에 해당하지 않는) 유형인 경우에도 A exists라는 형식의 판단을 허용하며, 유사한 이유에서 이런 형식의 판단들은 종합판단이며 결정불가능하고 불완전하다고 주장한다.

51) 예컨대 Sommaruga, G. (2000), pp. 208-210 및 거기 언급된 참고문헌을 볼 것.

52) 곧 괴델의 정리와 관련해 지적할 바와 같이, a가 A의 증명이라는 사실이 A에는 포함되지 않았으나 a에 포함된 개념에 의거해 명백해 질 수 있다.

질 수 있다.[53] a:Pf(A) 형식의 판단이 결정가능하다는 사실은 단형 유형론은 이런 요구조건을 만족한다는 점을 보인다.

A true, 즉, Pf(A) exists 형식의 판단들이 결정불가능한 이유는 무한 영역에 관한 존재양화는 일반적으로 결정불가능하다는 익숙한 사실에 기인한다. 한 형식체계의 증명대상들은 효과적으로 열거 가능하지만 그 열에서 임의의 명제 A에 대해 A의 증명대상이 나타나는지 여부를 확인하는 절차가 항상 종결될 수 있다는 보장은 없다. 물론 A가 특수한 형태의 명제들, 예컨대 명제논리의 명제들로 제약될 경우는 그런 보장이 있을 수 있지만, 일반적으로는 그런 보장이 없는 것이다. 더구나 수학적 증명들을 한 형식체계에서의 증명들로 국한시키지 않는 직관주의적 정신을 따르면, 임의의 수학적 명제에 대해 그런 절차가 있다는 보장은 더욱 없다.

마틴뢰프의 흥미로운 주장 중의 하나는 불완전성(incompleteness) 또한 결정불가능성과 마찬가지로 통상적인 수학적 판단이 존재 판단에 해당한다는 점에 기인한다는 것이다. 우선 그는 a:A 및 a=b:A 형식의 판단들은 다음과 같은 의미에서 완전하다(complete)고 주장한다. ‘그런 형식을 지닌 어떤 판단을 도출하기 위해서는, 그 판단에 포함된 개념들에 관한 법칙들 이외의 다른 법칙을 필요로 하지 않는다. 따라서, 그 판단에 포함된 개념들에 관한 법칙들 이외의 다른 법칙들에 호소할 필요가 없기 때문에, 그 판단에 포함된 개념들에 관한 법칙들은 그 판단의 도출을 위해 완전하다.’[54] 여기서 마틴뢰프가 의미하는 완전성은 다음과 같이 재 서술 될 수 있을 것이다.

---

53) 이런 요구조건은, BHK 의미론과 관련하여, 크라이슬(G. Kreisel)과 덤밋(M. Dummett) 등에 의해 명시적으로 서술되었다. 정인교 (2011) 주석 8)을 참조할 것.

54) Martin-Löf, P. (1994), p. 97.

> (MC) 어떤 형식체계 L이 L의 어떤 판단들의 집합 S에 대해 완전하다는 것은, J가 S에 속한 임의의 옳은 판단일 경우, J는 오로지 J에 나타나는 상항들에 관한 L의 규칙들로부터 도출가능하다는 것을 의미한다.

마틴뢰프는 이런 (MC)의 의미에서 단형 유형론이 a:A 및 a=b:A 형식의 판단들에 대해 완전하다고 주장하는 것이다.[55] 이런 의미의 완전성은 괴델의 불완전성정리에서 부정되는 완전성과는 다르다는 지적이 제기될 수 있을 것이다. 그러나 직관주의적 유형론을 뒷받침하는 두 가지 주요 논제들을 전제한다면, 이들은 별로 다른 개념이 아니며, 오히려 (MC)의 완전성이 괴델의 증명의 의의를 더 잘 드러낸다고 할 수 있다. 그 두 논제란 추론은 (명제들 간의 이행이 아니라) 판단들 간의 이행이라는 논제와 이가원리가 항상 타당하지는 않다는 직관주의의 기본 논제이다. 이 점을 조금 더 자세히 살펴보자.

괴델의 정리에서의 불완전성 개념은 흔히 '부정 완전성(negation completeness)'이라고 불리는 구문론적 의미로 (NC)와 같이 정의되거나, 의미론적 용어에 의존하여 (SC)와 같이 정의된다.

> (NC) 어떤 형식체계 L이 완전하다는 것은 J가 L의 임의의 문장일 경우 J나 ¬J 둘 중 하나는 L의 규칙들에 의해 도출가능하다는 것을 의미한다.

55) 단형 유형론은 열린 체계이므로, 새로운 명제나 집합이 항상 도입될 수 있다. 마틴뢰프의 주장은, 새로운 명제 및 집합의 정의가 단형 유형론에서 요구하는 조건을 - 이는 그 의미에 의해 집합 혹은 명제를 올바르게 정의하기 위한 조건이다 - 만족한다면, 이런 명제나 집합에 관한 a:Pf(A) 및 a=b:Pf(A) 형식의 판단들은 항상 분석적이고 완전하다는 주장으로 여겨져야 할 것이다.

(SC) 어떤 형식체계 L이 완전하다는 것은 J가 L의 (의도된 모형에서) 참인 임의의 문장일 경우 J는 L의 규칙들에 의해 도출가능하다는 것을 의미한다.

산수의 불완전성에 관한 괴델의 정리의 의의는 (SC)를 통해 더 잘 드러난다. 괴델의 정리는 로빈슨 산수를 확장하는 어떠한 일관적인 형식체계이든 그 체계에서는 도출할 수 없는 (그러나 참인) 산수 문장이 있음을 보이기 때문이다. 어쨌거나 임의의 문장은 참이거나 거짓 둘 중 하나라는 이가원리(principle of bivalence)를 전제한다면, (SC)의 완전성은 (NC)의 완전성을 함축하며, 나아가 L이 건전한(sound) 체계일 경우 (NC)의 완전성은 (SC)의 완전성을 함축한다. 그러나 이가원리를 수용하지 않는 직관주의적 입장에서 볼 때는, L이 건전하다고 하더라도, 이 둘은 동치가 아니다. 직관주의적 입장에서 볼 때는 (SC)가 보다 적절한 완전성 개념에 근접하며, (NC)는 그 자체로 별로 유용하지 않은 개념이라고 할 수 있다. 이 점은 다음과 같은 고려에 의해 확인된다.

우선 앞서 언급된 첫 번째 논제를 전제한다면, (NC)와 (SC)에서의 문장은 판단을 나타내는 것으로 이해되어야 한다. 아울러, 직관주의적 유형론의 판단들은, 말하자면, 모두 긍정판단의 형태이고 부정판단의 형태에 해당하는 것이 없다. 직관주의적 유형론의 부정연산은 명제에 적용되는 것이지 판단에 적용되는 것이 아니다. 통상적인 부정판단 ‘A는 참이 아니다’는 판단이나 ‘A는 거짓이다’는 판단은 (고전적으로나 직관주의적으로나) ‘¬A는 참이다’는 판단에 해당한다. 따라서 (NC)의 정의 항에 해당하는 것을 직관주의적 유형론의 맥락에서 표현하자면, ‘J가 L의 임의의 명제일 경우 J가 참이라는 판단이나 ¬J가 참이라는 판단 둘 중 하나는 L의 규칙들에 의해 도출가능하다’는 조건이 될 것이나, 이는 앞서 언급된 두 번째 논제인 직관주의의 기본 논제를 전제할 때 애당초 일반적으로

요구될 수 없는 조건인 것이다.

한편 (SC)의 정의 항에 해당하는 조건을 직관주의적 유형론의 맥락에서 표현하자면, (SC') 'J가 L의 임의의 옳은 판단일 경우 J는 L의 규칙들에 의해 도출가능하다'는 것이 (혹은 'J가 L의 임의의 참인 명제일 경우 'J는 참이다'는 판단은 L의 규칙들에 의해 도출가능하다'는 것이) 될 것이다. (MC)는 (SC')보다 일반적이면서 강한 조건을 포함한다. 보다 일반적인 점은 (MC)의 S를 L의 모든 판단들로 간주하면 (SC')과 유사한 형태가 되기 때문이다. 보다 강한 점은, (MC)의 완전성을 위해서는, J는 오로지 J에 나타나는 상항들에 관한 L의 규칙들로부터 도출가능 해야 하기 때문이다. 이제 (MC)의 '옳은 판단'이란 표현과 (SC)의 '참인 문장'을 같은 직관주의적 의미로 이해하면, (MC)의 조건이 (SC)의 조건을 함축한다는 점은 명백하다.

(MC)의 완전성 조건은 (SC)의 완전성 조건보다 강하므로, 분석판단의 논리가 (MC)의 의미에서 완전하다는 논제는 분석판단의 논리가 (SC)의 의미에서 완전하다는 논제를 함축한다. 한 흥미로운 질문은, '직관주의적으로 적절한 완전성의 개념을 위해, (MC)에서 요구되는 (SC)보다 강한 조건, 즉, 어떤 판단이든 그 판단에 포함된 개념들에 관한 법칙들에 의해 도출될 수 있어야 한다는 조건이 필수적인가?'라는 것이다. 이는, '완전성'이란 용어의 사용에 관한 사소한 문제로 여겨질 수도 있지만, 직관주의적 의미론의 중요한 문제, 예컨대 조화의 요구(The Requirement of Harmony)와 보존적 확장(conservative extension)의 조건과의 관계에 관한 문제와 관련해 고려되어야 한다.

어떤 체계 L이 그 체계의 모든 판단들에 대해 (MC)의 요구조건을 만족한다면 (즉, (MC)의 S가 L의 모든 판단들이라면) L은 보존적 확장의 조건을 만족한다. 즉, K가 L의 어떤 상항이고 J가 K를

포함하지 않는 판단일 경우, J가 L에서 도출가능하다면 J는 이미 L－K, 즉, L에서 K에 관한 규칙을 제거한 체계에서 도출가능하다. 마찬가지로, L'이 L을 확장하는 체계일 경우, L에 속하는 판단 J가 L'에서 도출가능하다면 J는 이미 L에서 도출가능하다. 언어사용에 관한 조화의 요구는, 판단의 근거들와 판단의 결과들에 관한 '조화'를 요구하는 것으로, 이는 덤밋 등에 의해 직관주의적 적절한 의미론이 만족해야 할 조건으로 간주되어 왔다. 덤밋은 주어진 언어 전반의 이른바 '총체적 조화(global harmony)'는 보존적 확장의 요구와 같다고 주장해 왔으며, 프라위츠는 조화의 요구는 수용하면서도 괴델의 정리에 의거해 보존적 확장의 요구는 일반적으로 요구될 수 없다고 주장해 왔다.[56] 분석판단의 논리가 (MC)의 의미에서 완전하다는 마틴뢰프의 주장은 단형 유형론은 그가 분석판단으로 분류하는 형식의 판단들에 관해 보존적 확장의 요구를 만족한다는 것을 함축한다. 마틴뢰프는 A true와 같은 종합판단은 a:Pf(A)와 같은 더 기본적인 분석판단에서 a와 같은 정보를 은폐함으로써 얻어지므로, 모든 종합판단은 항상 어떤 분석판단에 근거하며(grounded) 분석판단이 종합판단보다 더 기본적(basic)이라 여긴다.[57] 유사한 이유에서 준홈(G. Sundholm)은 보존적 확장의 조건에 해당하는 조화의 요구는 직관주의적 유형론의 분석판단들에서 잘 포착될 수 있다고 믿은 듯하다.[58] 이와 같이, 직관주의적 의미론에서 보존적 확장의 요구가 만족되어야 할 조건으로 간주된다면, 윗 단락에서 제기된 문제에 대한 긍정적 답변이 옹호될 수 있을 것이다.

분석성 및 완전성에 관한 마틴뢰프의 규정에 의하면, 분석판단은

56) 정인교 (1997) 및 정인교 (1999)와 거기 언급된 참고문헌을 볼 것.

57) Martin-Löf, P. (1994), p. 95.

58) Sundholm, G. B. (2000), p. 204 및 프라위츠의 비판 (Prawitz, D. (2000), p. 328)을 볼 것.

그것이 옳은 (명백한) 경우 오로지 그 판단에 포함된 개념들에 관한 분석에 의거해 명백하게 되는 판단이고, 단형 유형론은 그 체계에서 나타낼 수 있는 분석판단들에 대해 완전하므로, 단형 유형론은 그 체계에 포함된 개념들에 대한 완전한 분석을 포함하고 있는 셈이다. 마틴뢰프에 의하면, A exists와 같은 종합판단의 논리가 불완전한 것은 종합판단은 a:A와 같은 보다 더 기본적인 분석판단에서 a와 같은 대상에 대한 정보가 누락된 존재 판단에 해당하기 때문이다. 이런 점에서 마틴뢰프는 괴델의 증명의 의의를 다음과 같이 진단한다. 명제 A가 어떤 형식체계 L에서 표현되었다고 할 때, A true라는 판단을 L에서 입증하기 위해서는 어떤 구성 a가 A의 증명이라는 것을 L에서 입증할 수 있어야 한다. 그러나 A가 옳은 명제라 할지라도, 그 증명대상이 L에서 표현된 수단을 사용해 구성될 수 있으리라는 보장은 없다. 이는 단순히 a:Pf(A)가 옳게 되는 어떠한 증명대상 a도 L에서는 표현하지 못할 수 있기 때문이다. 물론 a:Pf(A)가 옳은 경우, 그 판단은 L을 a (및 A)에 포함된 개념들에 관한 완전한 규칙들을 포함하는 체계로 확장한 체계 L'에서 입증될 수 있다. 괴델의 증명은 일차 산수의 언어에 속하는 종합판단은 항상 이런 현상을 드러낸다는 점을 보였다는 것이다.[59]

불완전성의 기원에 관한 마틴뢰프의 진단은, 그 진단이 의존하는 분석적 판단과 종합적 판단에 관한 그의 분석과 함께, 논리적 지식과 수학적 지식의 중요한 사항을 드러내며, 의미론, 특히 증명론적 의미론에 소중한 시사를 내포한다. 이 글에서 필자는 그의 분석과 진단의 주요 측면들을 보다 분명히 드러내어 검토함으로써, 직관주의적 유형론이 인식론과 의미론의 문제들에 대해 지니는 함의를 효과적으로 다루기 위한 단초를 마련하려고 하였다.

---

59) Martin-Löf, P. (1994), p. 98.

참고문헌

정인교 (1997), “조화와 안정”, 김여수 외,『언어・진리・문화 1』, 철학과 현실사, pp. 397-424.

정인교 (1999), “조화와 보존적 확장”,『철학연구』 제45집, pp. 289-303.

정인교 (2003), “자체적으로 정당한 규칙과 논리상항의 의미”,『논리연구』 제6집 제2호, pp. 1-22.

정인교 (2011), “직관주의적 유형론에서의 명제와 판단”,『논리연구』 제14집 제2호, pp. 39-75.

Geach, P. (1972), *Logic Matters*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles.

Martin-Löf, P. (1971), “A Theory of Types”, Unpublished Technical Report, University of Stockholm, Stockholm.

Martin-Löf, P. (1984), *Intuitionistic Theory of Types*, Bibliopolis, Naples.

Martin-Löf, P. (1987), “Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof”, *Synthese* 73, pp. 407-420.

Martin-Löf, P. (1991), “A Path from Logic to Metaphysics”, *Atti del Congresso Nuovi Problemi della Logica e della Philosofia della Scienza, Viareggio, 8-13, gennaio 1990*, Vol. II, pp. 141-149, CLUEB Bolgna.

Martin-Löf, P. (1994), “Analytic and Synthetic Judgements in Type Theory”, in Parrini, P. (ed.) *Kant and Contemporary Epistemology*, pp. 87-99, Kluewer Academic Publishers.

Martin-Löf, P. (1996), “On the Meanings of the Logical Constants and the Justification of Logical Laws", *Atti degli Incontri di Logica Matematica, Universita di Sienna*, 1985, pp. 203-281. Reprinted in *Nordic Journal of Philosophical Logic* I(1), 1996, pp. 11-60.

Martin-Löf, P. (1998), "An Intuitionistic Theory of Types", Sambin, G. and J. Smith (eds.) *Twenty-five Years of Constructive Type Theory*, Clarendon Press, Oxford, pp. 127-172.

Nordström, B., Petersson K. and Smith, J. (1990), *Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction*, Clarendon Press, Oxford.

Nordström, B., Petersson K. and Smith, J. (2000), "Martin-Löf's Type Theory", in Abramsky, A. S. et al. (eds.) *Handbook of Logic for Computer Science* Vol. V, Oxford University Press, pp. 1-37.

Prawitz, D. (1971), "Ideas and Results in Proof Theory", in J. E. Fenstad (ed.) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pp. 235-307, N-H.

Prawitz, D. (2000), "Comments on the Papers", *Theoria* 64, pp. 283-337.

Rey, G. (2008), "The Analytic/Synthetic Distinction", Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/analytic-synthetic/

Salvessen, A. (1988), "Polymorphism and Monomorphism in Martin-Löf's Type Theory", Technical Report, Norwegian Computing Center.

Sommaruga, G. (2000), *History and Philosophy of Constructive*

Type Theory, Kluewer Academic Publishers.
Sundholm, G. B. (2000), "Proof as Acts and Proof as Objects: Some Questions for Dag Prawitz", *Theoria* 64, pp. 187-216.

고려대학교 문과대학 철학과
Department of philosophy, Korea University
ichung@korea.ac.kr

Analyticity and Completeness in Intuitionistic Type Theory

Inkyo Chung

Based on his analysis of judgement forms in intuitionistic type theory, Martin-Löf claims that the usual logical laws and interesting mathematical judgements are synthetic, not analytic. He further claims that the logic of analytic judgements is decidable and complete, while the logic of synthetic judgements is undecidable and incomplete. The aim of this article is to clarify and examine his claims. In section 1, I explain and give some comments on the monomorphic version of intuitionistic type theory. In section 2, after clarifying Martin-Löf's distinction between analytic and synthetic judgements, I examine some possible objections to it and evaluate the thesis that the usual logical laws and interesting mathematical judgements are synthetic. In section 3, I clarify and examine the thesis that the logic of analytic judgements is decidable and complete, while the logic of synthetic judgements is undecidable and incomplete.

Key Words: Martin-Löf, Intuitionistic monomorphic type theory, Analytic Judgement, Synthetic Judgement, Incompleteness