논리연구 14-2(2011) pp. 39∼75

직관주의적 유형론에서의 명제와 판단* **

정 인 교

【요약문】 마틴뢰프의 직관주의적 유형론의 중요 사항들을 설명하고, 그 체계의 가장 중요한 특성 중의 하나인 명제와 판단의 구분에 관해 검토한다. 1절에서 문제를 도입한 후, 2절에서 직관주의적 유형론의 명제개념은 직관주의적 명제개념의 발전된 형태임을 보이고, 3절에서는 직관주의적 유형론에서 가장 기본적인 판단개념을 설명한 후, 4절에서 직관주의적 유형론의 기본적인 추론규칙들을 설명하고 그 적용의 한 사례를 검토할 것이다. 마지막으로 5절에서, 직관주의적 유형론에서 명제와 판단의 구분이 차지하는 중요성을 부연한 후, 기초론적 체계에서 명제와 판단의 구분이 필수적인지의 문제와 관련하여, 통상적인 프레게적 구분으로부터 시작하여 직관주의적 유형론에서와 같은 구분에 이르기 위해서는 어떤 것들이 전제되거나 정당화되어야 하는지 검토할 것이다.

【주요어】 마틴뢰프, 직관주의, 유형론, 증명, 명제, 판단

* 접수일: 2011. 5. 9. 심사 및 수정완료일: 2011. 6. 7. 게재확정일: 2011. 6. 8.
** 이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2007-327-A00159). 유익한 논평을 해 주신 익명의 심사위원들께 감사드린다.

1. 들어가는 말

ZF와 같은 표준적 집합론이나 단순 유형론(Simple Type Theory)은 흔히 고전 수학의 기초적 체계로 간주된다. 그 한 이유는, 그 적절성에 관한 논란이 없지 않지만, 고전 수학의 개념들이 그런 체계에서 정의될 수 있고 고전 수학의 논증들이 그런 체계에서 형식화될 수 있기 때문이다. 유사한 의미에서 직관주의 수학의 기초적 체계로 의도된 몇 가지 형식체계들 중 마틴뢰프(P. Martin-Löf)의 직관주의적 유형론(Intuitionistic Type Theory)은 여러 측면에서 두드러진다.[1] 외견상 가장 두드러지는 점은 전산학에의 응용일 것이다. 직관주의적 유형론은, 그것이 잘 드러내는 증명(proof)과 프로그램(program) 그리고 유형(type)과 프로그램 문제 규정(program problem specification) 간의 동형(isomorphism)에 토대하여, 전산학에서 매우 유용하게 활용되고 있다.[2] 그러나 전산학적 활용과 독립적으로 직관주의적 유형론은 통상적인 형식체계들과 구분되는 중

---

[1] 직관주의적 유형론은 '마틴뢰프 유형론(Martin-Löf Type Theory)' 혹은 '구성주의적 유형론(Constructive Type Theory)'이라고도 불린다. 마틴뢰프는 그의 직관주의적 유형론의 첫 번째 (비서술적) 버전이 기라르(J. Girard)에 의해 비일관적인 것으로 판명난 이래, 약간씩 다른 형태의 (서술적) 버전을 제시하였다. 출판된 버전으로는 Martin-Löf (1998), (1975), (1982), (1984)가 있으며, 미출판 형태의 버전도 다른 학자들에 의해 소개되고 있다. (Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (2000) 참조) 직관주의적 유형론의 여러 버전들에 관한 비교를 위해서는 Sommaruga (2000)을 참조할 것. 가장 많이 논의되는 표준적인 버전은 Martin-Löf (1984) 및 Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990)의 체계들, 특히 이른바 '다형유형론(Polymorphic type theory)'이며, 본 논문에서의 논의도 이 체계를 중심으로 진행될 것이다. 직관주의적 유형론과 다른 직관주의 수학의 기초적 체계들과의 비교를 위해서는 Beeson (1985) 및 Troelstra and Van Dalen (1988)을 볼 것.

[2] 예컨대 Nordström et. al (1990), 22-23장 및 Thompson (1999), 6장 등을 볼 것.

요한 차이들을 지니고 있어서, 명제, 판단 및 추론과 같은 논리적으로 기본적인 개념과 형식체계 및 그 의미론에 대해 깊은 반성을 하게 하는 계기가 된다.

직관주의적 유형론과 ZF는 각각 직관주의 수학과 고전 수학에 대한 기초론적 역할을 수행하지만, 그 수행 방식에는 상당히 중요한 차이가 있다. ZF는 고전적 일차논리의 이론으로서, 논리규칙을 전제하고 고전적 집합개념에 의해 정당화되어야 할 공리들로 이루어진 형식체계이다. 반면에 직관주의적 유형론에서는 유형, 집합 혹은 명제의 개념에 관한 기본 원리에 의거해[3] 논리규칙과 수학적 공리들이 외견상 분리되거나 차별화되지 않고 획일적으로 제시된다. 이런 점에서 직관주의적 유형론은 단순 유형론과 유사하게 여겨질 수 있지만, 이들 또한 전자가 직관주의 논리를 정당화하고 후자가 고전 논리를 정당화한다는 점을 넘어서는 중요한 차이를 지닌다. 실제로 직관주의적 유형론에서의 유형 개념이 단순 유형론 혹은 분지 유형론(Ramified Type Theory)에서의 유형 개념과 기본적인 공통성을 지니고 있는지 여부는 깊은 검토를 필요로 한다.[4]

보다 중요하게 직관주의적 유형론은 기존의 고전 논리 체계나 직관주의 논리 체계와는 상당히 다른 성격을 지니고 있다. 예컨대 직관주의적 유형론에서는, 통상적으로 메타언어에서 서술되는 문장형성규칙이 대상언어에서 집합(유형, 명제)형성규칙으로 제시되며, 통상적으로 메타언어에서 정의되는 증명이 대상으로 간주되어 대상언어 내에서 다루어진다. 특히 직관주의 유형론에서 기본적이고 중요한 사항은 명제와 판단의 구분이다. 명제는 (그 명제의) 증명들

---

[3] 이른바 ‘단형 유형론(Monomorphic type theory)’에서는 유형은 집합 및 명제와 구분되지만 (Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (2000) 참조), Martin-Löf (1984)에서와 같은 이른바 ‘다형 유형론(Polymorphic type theory)’에서는 유형과 집합 및 명제는 같은 것으로 간주된다.

[4] Martin-Löf (1984), pp. 22-23 참조.

의 집합으로서 논리상항과 같은 연산이 적용되는 대상이며, 추론은 명제들이 아니라 판단들로 이루어진다. 즉, 추론규칙의 적용대상이 되는 것들은 명제가 아니라 판단이다. 또한 직관주의적 유형론은 형식 체계로 간주될 수 있지만, 통상적인 집합론적 모형론에 의해 이 체계의 의미론을 제시하는 일은 마틴뢰프의 기초론적 의도와 배치된다. 마틴뢰프는, 통상적인 모형론은 대상언어를 메타언어로 번역하는 작업에 해당하므로 통상적인 형식의미론에서는 메타언어에 대한 의미론이 전제되어야 하는 한계를 지닌다고 지적한다.[5)] 직관주의적 유형론에 대해 그는 별도의 형식의미론을 의도하지 않으며, 이 체계의 규칙들은 일상 언어에서의 의미 설명에 의해 직접적으로 정당화된다. 이런 이유에서 직관주의적 유형론에 대한 의미론은 이른바 '직접적인 의미론(direct semantics)'이라 불린다.

직관주의적 유형론은 논리적으로 기본적인 개념들에 대해 새롭고 흥미로운 시사점을 제시하기 때문에, 이 이론의 개념적 기초와 그 함의에 대한 검토를 통해서 우리는 고전 수학과 직관주의 수학 간의 쟁점에 대해서 뿐 아니라 논리학과 철학의 기본 문제들에 대해서도 소중한 진전을 얻을 수 있을 것이다. 이 글의 의도는 직관주의적 유형론의 개념적 기초에 관한 깊이 있는 검토가 매우 미약한 현 상황을 약간이나마 개선하려는 것이다. 그러기 위해서 우선 필자 나름대로 직관주의적 유형론의 기본 내용을 설명한 후, 이 이론의 가장 중요한 구분 중의 하나인 명제와 판단에 대해 검토할 것이다. 직관주의적 유형론에 대한 직접적인 의미론은 검증주의적 의미론의 한 형태이며, 이런 검증주의적 의미론이 수학적 언어를 넘어서서 언어 일반에 적용될 수 있는지에 대해서는 심각한 논란이 있어왔다.[6)] 이 글에서는 일단 수학적 언어를 중심으로 논의가

---

5) Martin-Löf (1987), p. 408.

6) 수학적 언어를 넘어선 언어 일반에 직관주의적 유형론을 적용하려는 작업은 Ranta (1994) 등에 의해 시도되었다.

진행될 것이다. 2절에서 직관주적 유형론의 명제개념은 직관주의적 명제개념의 발전된 형태임을 보이고, 3절에서 직관주의적 유형론에서 가장 기본적인 판단개념을 설명한 후, 4절에서 직관주의적 유형론의 기본적인 추론규칙들에 관한 설명 및 그 적용의 한 사례가 검토될 것이다. 마지막으로 5절에서, 직관주의적 유형론에서 명제와 판단의 구분이 차지하는 중요성을 부연한 후, 기초론적 체계에서 명제와 판단의 구분이 필수적인지의 문제와 관련하여, 그 구분에 관한 통상적인 프레게적 관점으로부터 직관주의적 유형론에서와 같은 구분을 이끌어 내기 위해서는 어떤 것들이 전제되거나 정당화되어야 하는지 검토될 것이다.

2. BHK 해석과 집합으로서의 명제

직관주의적 유형론의 배경을 이루는 한 핵심적 사상은, 직관주의 논리상항에 대한 표준적인 의미설명으로 간주되는 이른바 'BHK 해석'이다. 문장의 의미를 진리조건에 의해 설명하는 고전논리와 달리, BHK 해석에서는 문장의 의미가 증명조건에 의해 설명된다. 일단 문장의 의미를 '명제'라 하자. 원자명제의 증명조건이 주어졌다는 가정 하에서, 논리적 복합명제의 증명조건에 대한 BHK 해석에서의 통상적인 설명은 다음과 같다.[7)]

A&B의 증명은 A의 증명과 B의 증명에 해당하는 구성이다.

---

7) 원래 헤이팅(A. Heyting)은 명제를 (그 증명에 대한) 의도(intention) 혹은 기대(expectation)로, 콜모고로프(A. Kolmogorv)는 명제를 문제(problem) 혹은 과제(task)로 설명하였지만, 그들의 설명은 기본적으로 여기 제시된 설명과 일치하는 것으로 간주된다. 마틴뢰프는 명제에 대한 고전적인 진리조건적인 설명도 BHK와 같은 방식으로 '해석'될 수 있다는 지적을 하지만 (Martin-Löf (1987), p. 411), 이는 실재론자들이 의도하지 않은 해석이 될 것이다.

A∨B의 증명은 A의 증명 혹은 B의 증명에 해당하는 구성이다.
A⊃B의 증명은 A의 증명에 적용될 경우 B의 증명을 산출하는 (혹은 산출한다는 것을 우리가 알 수 있는) 구성이다.[8)]
⊥의 증명은 없다.
∀xB의 증명은 양화사의 영역에 속하는 임의의 대상 a에 적용될 경우 B(x/a)의 증명을 산출하는 (혹은 산출한다는 것을 우리가 알 수 있는) 구성이다. (양화사의 영역을 명시적으로 A로 나타내어서 표현한다면 이 조건은 다음과 같다: (∀x∈A)B의 증명은 A에 속하는 임의의 대상 a에 적용될 경우 B(x/a)의 증명을 산출하는 구성이다.)
∃xB의 증명은 양화사의 영역에 속하는 특정한 대상 a에 대해 B(x/a)의 증명에 해당하는 구성이다. (양화사의 영역을 명시적으로 A로 나타내어서 표현한다면 이 조건은 다음과 같다: (∃x∈A)B의 증명은 어떤 특정한 a에 대해 a가 A에 속한다는 증명과 B(x/a)의 증명에 해당하는 구성이다.)[9)]
¬A는 A⊃⊥으로 정의되며, 위의 설명에 의해 ¬A의 증명은 A의 증명에 적용될 경우 ⊥의 증명을 산출한다는 것을 우리가 알 수 있는 구성인데, ⊥의 증명은 없으므로, ¬A의 증명은 A의 증명은 있을 수 없다는 것을 보이는 구성이다.

BHK 해석에서의 증명 개념은 어떤 특정한 형식체계에 상대적인 것이 아니다. 특히 이는 통상적인 형식적 정의에서와 같이 특정한 형식체계의 공리들이나 추론규칙들에 의해 얻어지는 문장들의 열로 이해되어서는 안 된다. 가능한 모든 수학적 논증을 하나의 형식 체

8) 괄호 안에 언급된 추가적 인지 조건, 즉 A⊃B의 증명은 A의 증명에 적용될 경우 B의 증명을 산출한다는 것을 우리가 알 수 있는 구성이어야 한다는 조건은 크라이슬(G. Kreisel)과 덤밋(M. Dummett) 등에 의해 강조된 것으로, 이 추가 조건이 필수적인지에 대한 논란이 없지 않다. 덤밋은, 증명은, 그것이 제시된 경우, 우리가 인지할 수 있는 것이어야 하기 때문에 이 조건이 필수적이라고 주장한다. 유사한 논의는 보편양화의 증명에 대한 추가적 인지 조건에 대해서도 적용된다. (Dummett (2000), p. 13 및 Troelstra and Van Dalen (1988), pp. 31-32 참조.)

9) 보편양화사와 존재양화사의 증명에 대한 설명에서 ‘a’는 대상언어와 메타언어에 공통적으로 속하는 표현으로 간주되었다. ‘B(x/a)’는 B에 자유롭게 나타나는 변항 x를 a로 대치한 결과를 나타낸다.

계에서 나타낼 수 있다는 생각은 아마 괴델의 정리와 상충할 뿐 아니라 직관주의의 기본 정신과도 위배되는 생각이다. 또한 BHK 해석에서 언급된 증명은 주어진 논리적 복합문에 대한 '표준적 증명(canonical proof)'으로 이해되어야 한다. 즉, 주어진 논리적 복합문의 증명은 BHK 해석에서 언급된 구성과 다른 방식으로 이루어질 수 있지만, 그 방식이 주어진 문장의 증명으로 간주되기 위해서는 그것은 주어진 문장의 표준적 증명을 얻는 방법이어야 한다. 주어진 문장의 의미가 그 문장에 대한 표준적 증명에 의해 규정되기 때문이다.

논리적 복합문의 증명에 대한 BHK 설명은 겐첸(G. Gentzen)의 자연연역 체계의 도입규칙들에 대응된다. 그의 자연연역 체계의 도입규칙이 도입되는 논리상항의 의미를 정의하고, 제거규칙은 그렇게 정의된 논리상항의 의미에 의해 정당한 규칙이라는 겐첸의 주장은 많은 논란과 연구 과제를 낳았다. 마틴뢰프에 의하면, 겐첸의 주장은 옳으며 특히 명제는 도입규칙들에 의해 정의된다고 할 수 있다.[10] 최소한 직관주의 논리에 대한 겐첸의 자연연역 체계에서의 도입규칙은 BHK 해석을 반영하는 것으로, 이와 관련된 증명론적 탐구는 활발히 진행되어 왔다. 예컨대 프라위츠(D. Prawitz)의 정형연역(normal deduction)을 표준적 증명을 반영하는 것으로 간주할 때, 그의 정형화 정리(Normalization theorem)는 주어진 명제에 대한 증명은 모두 표준적 증명을 얻기 위한 방법에 해당한다는 점을 드러내는 것으로 여겨질 수 있다.[11] 마틴뢰프의 직관주의적 유형론의 한 특성은 통상적으로 특정한 체계에 관한 메타언어에서 다루어진 이런 의미론적 사항과 구문론적인 사항을 특정한 언어에 제약되지 않는 일반적인 방식으로 대상언어에서 다룰 수 있게 하는

---

10) Martin-Löf (1995), pp. 189-190.

11) 정형 연역 및 정형화 정리에 관한 설명을 위해서는 정인교 (1996), Prawitz (1965) 및 (1971)을 볼 것.

것이다. 그 한 계기는 증명과 조합논리(Combinatory Logic) 혹은 람다 연산(λ-calculus)의 항(term)과의 대응에 관한 커리(H. Curry) 및 하워드(W. Howard)의 발견이다.[12)]

이른바 ‘커리-하워드 동형(Curry-Howard Isomorphism)’은 BHK 해석 및 정형화 정리와 더불어 직관주의적 유형론의 배경이 되는 중요한 발견이다. 이 동형은 명제와 유형 (혹은 집합) 간의 대응 및 증명과 확장된 람다 연산의 항 간의 대응을 나타낸다. 즉, 겐첸의 직관주의적 자연연역 체계에서의 어떤 문장에 대한 증명, 혹은 보다 일반적으로 BHK 해석을 따라 이해된 명제에 대한 증명은 확장된 람다 연산의 항으로 나타내어질 수 있고, 증명된 명제는 그렇게 나타내어진 항의 유형에 해당한다는 사실이다. 단순한 예를 들자면, x를 A의 증명이라 가정한다면, A⊃B의 표준적 증명은 x에 적용되어 B의 증명 b를 산출하는 구성이므로, 이는 람다 연산의 항 λx.b에 해당한다. 가정에 의해 b의 유형은 B이고 x의 유형은 A이므로, λx.b의 유형은 A→B 혹은 B^A, 즉, 유형 A의 대상들로부터 유형 B의 대상들로의 함수들의 유형에 해당한다. 이로부터, 겐첸의 ⊃-도입규칙과 ⊃-제거규칙의 적용을 통해 얻는 증명은 각각 그 규칙의 전제들의 증명들에 해당하는 람다 항들로부터 람다 연산의 추상(abstraction)과 적용(application)을 통해 얻을 수 있는 항에 해당하며, 프라위츠의 ⊃-환원은 람다 연산의 베타변환(β-conversion)에 해당함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 대응 하에서 직관주의 논리에 대한 정형화 정리는 확장된 람다 연산의 정형화 정

12) 커리와 화이는 명제논리의 조건문에 관한 부분인 긍정함축연산(positive implicational calculus)의 두 공리를 각각 조합자(combinator) S와 K에, 전건긍정규칙을 조합자 적용연산(application)에 대응시킴으로써 이 공리체계에서의 증명과 조합연산의 항이 대응됨을 보였고, 하워드는 겐첸의 자연연역 체계에서의 증명들이 확장된 람다 연산의 항과 대응됨을 보였다. (Curry, H. and R, Feys (1958), Howard (1980)) 커리-하워드 동형에 관한 풍부한 논의를 위해서는 Sørensen, M. H. and P. Urzyczyn (2006)을 볼 것.

리에 해당한다.

수학적 문장의 의미를 그 증명조건에서 찾는 직관주의적 의미론의 입장에서 볼 때, BHK 해석은 논리적 복합문의 의미, 즉 논리적 복합 명제를 그 증명들의 집합으로 간주할 수 있게 한다. 명제의 증명들은 '증명대상(proof objects)'이라 불리는 추상적 대상들로 간주되어[13] 확장된 람다 연산이나 적절한 표현 이론의 항들로 나타내어지므로,[14] 수학적 명제는 이런 항들의 값들의 집합으로 간주될 수 있다. 또한 항들의 평가규칙에 의해 같은 값을 지니는 항들은 같은 증명대상을 나타내는 것으로 간주될 수 있다.[15] 이런 관찰에 의거하여 직관주의적 유형론에서는 구문론적 코드로 여겨지기 쉬운 '유형으로의 식(formulae as types)' 논제를 넘어서서 특정한 언어에 상대적이지 않고 일반적인 의미론적 논제로 여겨질 수 있는 '유형으로서의 명제' 혹은 '집합으로서의 명제'에 해당하는 명제개념을 형식화 한다. 이런 집합으로서의 명제개념에 의하면, 'A는 명제이다'는 판단을 올바르게 하기 위해서는 A의 표준적 증명들이 어떤 것들인지, 그리고 A의 (표준적) 증명들 간의 동일성 기준은 무

13) 한국어에서 '증명대상'이란 말은 '증명되어야 할 것'이란 의미로 이해되기가 쉽다. 이 글에서 '증명대상'(혹은 직관주의적 유형론의 맥락에서 '증명')이란 표현을 쓸 때는 그런 뜻이 아니라, 대상으로 간주된 증명을 의미한다.

14) 마틴뢰프는 확장된 람다 연산을 대신하여 표현 이론(theory of expression)을 고안하였다. (Nordström, B. et al. (1990), 3장을 볼 것) 표현이론은 일종의 categorial grammar로서 항들은 함수들로 간주된다. 직관주의적 유형론의 형식체계에 관한 이 글의 설명에서 'B(a)'와 'b(a)'같은 표현은 각각 B와 b에 a를 적용한 것을 나타낸다. (이는 원래 프레게의 의도이기도 하다.) 일반적으로 직관주의에서 함수는 원초적인 개념으로 간주하며, 순서쌍들의 집합으로 정의된 것으로 간주하지 않는다.

15) 증명대상을 나타내는 항들의 평가규칙은 프라위츠의 환원절차에 해당하는 규칙들을 포함하며, 이런 항들 간의 동치관계는 마틴뢰프의 유형론에서 '정의적 동치(definitional equality)관계'에 해당한다. 이런 기준에 의하면, 같은 정형연역으로 환원되는 연역들은 같은 증명을 나타낸다. 증명의 동일성에 관한 이런 기준에는 논란이 있을 수 있다.

엇인지가 파악되어야 한다.

역으로, 마틴뢰프에 의하면, 집합이 명제로 간주되고 집합의 원소가 (그 집합에 해당하는) 명제의 증명으로 간주될 수도 있다. 그를 따르자면, 직관주의적으로 집합은 그 표준적 원소들과 그들 간의 동일성 기준에 의해서 규정된다.[16] 즉, 'A는 집합이다'는 판단을 올바르게 하기 위해서는 A의 표준적 원소가 무엇인지, 그리고 그들 간의 동일성 조건이 무엇인지가 파악되어야 한다. 마틴뢰프의 이러한 견해를 따르자면, 'A는 명제이다'는 판단과 'A는 집합이다'는 판단 (혹은 'A는 유형이다'는 판단), 그리고 'a는 A의 증명이다'는 판단과 'a는 A의 원소이다'는 판단 (혹은 'a는 유형 A에 속하는 대상이다'는 판단)은 각각 A를 명제와 집합 (혹은 유형)으로 보는 점에서 차이가 있을 뿐 실질적으로는 아무런 차이가 없다.[17]

따라서 이런 집합으로서의 명제개념을 따르면, BHK 설명은 그 표준적 증명에 의거한 복합명제의 설명인 동시에 그 표준적 원소에 의거한 집합의 설명이 된다. 구체적으로, 명제 A와 B의 연언 A&B는 집합 A와 B의 데카르트 곱 $A \times B$에, 선언 $A \vee B$는 집합 A와 B의 구분된 합(disjoint union) A+B에, 함축 $A \supset B$는 집합 A로부터 집합 B로의 함수들의 집합 $A \rightarrow B$에, $\perp$은 공집합 {}에 해당한다. 양화명제에 해당하는 집합을 도입하기 위해서는, 우선 집합 A의 원소 a에 적용되어 명제 B(a)를 값으로 가지는 명제함수 B는 A에 대한 집합족(family of sets over A)에 해당한다는 점이 지적되어야 한다. 보편양화 $(\forall x \in A)B$는 집합족 B의 데카르트 곱 (Πx

---

16) Martin-Löf (1984), pp. 7-8. 이런 집합 개념은 물론 고전적 집합론에서의 집합 개념과는 다른 것으로, 비샵(Bishop and Bridges (1985))의 구성적 집합 개념과 상통한다.

17) 앞서 언급된 대로 유형과 집합은 다형유형론(polymorphic type theory)에서는 동일하게 취급되지만, 단형유형론(monomorphic type theory)에서는 구분된다.

$\in A)B$ (보다 간단히 $\Pi(A,B)$)에 해당하며, 존재양화 $(\exists x \in A)B$는 집합족인 B의 구분된 합 $(\sum x \in A)B$ (보다 간단히 $\sum(A,B)$)에 해당한다. $A \rightarrow B$와 $A \times B$는 각각 $\Pi(A,B)$와 $\sum(A,B)$에서 B가 A의 원소에 상관없이 항상 같은 값을 지닐 경우에 해당한다.[18]

이제 BHK 해석은 명제 혹은 집합을 그 표준적 원소에 의거해 정의하는 것으로 간주될 수 있으며 이는 또한 도입규칙에 대응하는 형태로 제시될 수 있다. 이를 마틴뢰프의 표현이론의 연산을 사용해 나타내면 (표 1)과 같다.[19]

(표 1)

명제	집합
a가 A의 증명이고 b가 B의 증명이면, <a,b>는 A&B의 증명이다.	a가 A의 원소이고 b가 B의 원소이면, <a,b>는 $A \times B$의 원소이다.
a가 A의 증명이면, inl(a)는 $A \vee B$의 증명이다; b가 B의 증명이면, inr(b)는 $A \vee B$의 증명이다.	a가 A의 원소이면, inl(a)는 A+B의 원소이다; b가 B의 원소이면, inr(b)는 A+B의 원소이다.
b가 A의 증명 a에 적용되어 B의 증명을 산출하는 함수이면, $\lambda(b)$는 $A \supset B$의 증명이다.	b가 A의 원소 a에 적용되어 B의 원소를 산출하는 함수이면, $\lambda(b)$는 $A \rightarrow B$의 원소이다.
$\perp$의 증명은 없다.	{}의 원소는 없다.
b가 A의 증명 a에 적용되어 B(a)의 증명을 산출하는 함수이면, $\lambda(b)$는 $(\forall x \in A)B$의 증명이다.	b가 A의 원소 a에 적용되어 B(a)의 원소를 산출하는 함수이면, $\lambda(b)$는 $\Pi(A,B)$의 원소이다.
a가 A의 증명이고 b가 B(a)의 증명이면, <a,b>는 $(\exists x \in A)B$의 증명이다.	a가 A의 원소이고 b가 B(a)의 원소이면, <a,b>는 $\Sigma(A,B)$의 원소이다.

[18] 람다 연산의 추상연산 λ와 유사한 역할을 하는 표현이론의 추상연산 ( )을 사용하면, $A \rightarrow B$와 $A \times B$는 각각 $\Pi(A,(x)B)$와 $\sum(A,(x)B)$로 정의될 수 있다.

[19] 표준적 증명이나 표준적 원소를 구성하는 연산으로 '구성자(constructor)'라 불리는 표에서의 <,>, inl, inr, λ는 표현이론의 기본적 연산이다. 순서쌍 연산인 <,>는 ZF에서와 같은 방식으로 정의된 것으로 간주되지 않으며, λ또한 람다 연산에서와 같은 것이 아니다. (Nordström et al. (1990), 3장을 볼 것)

명제(집합)가 그 표준적 증명(원소)에 의해 정의된다는 것은, A의 임의의 증명(원소)은 A의 표준적 증명(원소)을 얻는 방법에 해당한다는 것, 즉, A의 임의의 증명(원소)은 A의 표준적 증명(원소)으로 환원될 수 있다는 것을 함축한다. 예컨대 c가 A&B(A×B)의 증명(원소)이라면, c는 <a,b>를 얻는 방법에 해당하며, c는 표현이론의 규칙에 의해 <a,b>로 환원된다.

3. 판단과 추론

직관주의적 유형론에서 가장 기본적인 사항 중의 하나는 명제와 판단의 구분으로, 추론규칙들의 적용대상은 명제가 아니라 판단들이다. 마틴뢰프에 의하면, 명제는 논리상항이 적용되는 대상이고, 추론되거나 주장되는 것이 아니며, 추론의 전제나 결론은 판단들이다. 프레게 또한 추론이 명제들이 아니라 판단들 간의 이행으로 이루어진다는 점을 강조하였다.[20] 이 점은 프레게의 체계에서의 연역은 단순히 문장들의 열이 아니라, 항상 판단 혹은 주장의 효력을 나타내는 세로선과 내용을 나타내는 가로선이 결합된 '⊢'와 문장의 결합들의 열이라는 점에서도 명시적으로 드러난다. (통상적으로 주장(assertion)은 판단의 외적 표현으로 간주된다.) 일반적으로 프레게는 명령 혹은 의문과 구분되는 판단의 효력(force)에 의해 명제와 판단을 구분하려 한 것으로 간주된다. 이는 그가 일률적으로 세로선을 사용하여 판단의 효력을 나타내려 했다는 점에서도 그럴듯한 해석이다.

추론의 전제나 결론이 판단에 해당한다는 주장은 칸트(I. Kant)이전부터 전통적인 논리학에서 수용되어온 주장일 것이다.[21] 프레게는

20) 그러나, 프레게는 판단내용(judgeable content)과 명제(thought)를 동일시 한 것으로 보이지만, 직관주의적 유형론에서는 이들이 구분된다. 5절 참조.

칸트와 달리 판단의 범주 혹은 형식에 대한 구분이 불필요하다고 여긴 듯하다. 이는 일단 명제의 논리적 형식을 제대로 구분하면 주장의 효력만이 판단의 추가적 역할로 남는다는 생각에 근거하고, 이런 생각은 현대 논리학에서 일반적으로 받아들여진다. 그러나 직관주의적 유형론에서는 칸트가 의도한 것과 유사한 의미에서의 판단 형식에 관한 구분이 중요한 역할을 한다. 여기서는 우선 수학적 판단과 관련된 판단형식을 간략히 살펴보자. 우선 정언적 판단(categorical judgement)은 아무런 가정에 의존하지 않는 무조건적인 판단에 해당하며, 가언적 판단(hypothetical judgement)은 가정에 의존하는 조건적 판단에 해당한다. 정언적 판단에는 다시 몇 가지 기본적인 판단 형식이 있으며 이는 (표 2)에 나타나 있다.[22)]

(표 2)

일상적 표현	직관주의적 유형론에서의 표현
A는 명제(집합)이다.	A prop 혹은 A set
A와 B는 같은 명제(집합)이다.	A=B
a는 A의 증명(원소)이다.	a∈A
a와 b는 A의 같은 증명(원소)이다.	a=b∈A
A는 참이다(원소가 있다).	A true

21) ‘명제’, ‘판단’ 및 이와 관련된 용어의 관련된 혼돈스러운 역사에 관한 마틴뢰프의 견해는 Martin-Löf (1985)에서 찾아볼 수 있다.

22) 마틴뢰프는 ‘모든 정언적 판단 형식이 (표 2)에서와 같은 형식을 지닌다.’는 주장은 전혀 받아들이지 않는다. 모든 가능한 수학적 증명이 미리 규정될 수 없듯이, 명제(집합)와 판단의 모든 가능한 형식은 미리 제약될 수 없다는 것이 직관주의의 기본 정신으로 간주될 수 있으며, 이에 따라 직관주의적 유형론은 항상 새로운 명제(집합)와 판단형식이 도입될 수 있는 열린 체계이다. (Martin-Löf (1984), p. 8 및 Martin-Löf (1996), p. 108 참조.) 직관주의적 유형론이 직관주의 수학의 기초적 체계라는 주장은 지금까지의 직관주의 수학, 예컨대 Bishop and Bridges (1985)의 개념과 증명들이 마틴뢰프가 도입한 판단형식을 이용해 형식화될 수 있다는 의미로 이해되어야 할 것이다.

마틴뢰프에 의하면, 판단은 기본적인 인식적 개념으로서, 어떤 판단의 의미는 우리가 무엇을 알아야지 그 판단을 할 권한을 가지는가를 규정함으로써 정의된다.[23] 이에 따라 각 정언적 판단 형식의 의미는 (표 3)에 의해 정의된다. '집합으로서의 명제' 논제에 따라 명제와 집합은 동등한 것이 되므로, (표 3)에서는 명제를 포함하는 판단에 대한 규정을 따로 서술하지 않고 집합의 경우만 서술하였다.

(표 3)

정언적 판단 형식	올바른 판단을 하기위해 알아야 할 내용
A set	A의 표준적 원소들이 구성되는 방식과 그 동일성 기준.
A=B	A의 표준적 원소는 B의 표준적 원소이며 그 역도 성립한다. 아울러 A의 같은 표준적 원소들은 B의 같은 표준적 원소들이며 그 역도 성립한다.
a∈A	a는 A의 표준적 원소로 환원된다.
a=b∈A	a와 b는 A의 같은 표준적 원소로 환원된다.
A true	A의 원소가 있다.

'A true'라는 판단은 A를 명제로 간주할 때 보다 자연스러울 것이다. 이 경우, 'A true'는 '어떤 것이 A의 증명이다' 혹은 'A의 증명이 있다'는 판단으로 이해될 수 있으며, 이것이 'A가 참이다'는 판단의 직관주의적 의미라는 것이 마틴뢰프의 주장이다. 'A의 증명이 있다'는 판단은 물론 직관주의적 존재양화와 유사하게 이해되어야 한다. 즉, 그 판단을 올바르게 하기 위해서는 특정한 구성에 대해 그것이 A의 증명임을 알아야 한다. 그러나 주의해야 할 것은 이렇게 이해된 'A true'는 (존재)판단이며 명제가 아니라는 점이다. 마틴뢰프에 의하면 존재양화에 해당하는 어떠한 명제도 이

23) "A judgement is defined by laying down what it is that you must know in order to have the right to make it." (Martin-Löf (1996), p. 108)

판단과 동등한 역할을 하지 못한다.[24] 통상적으로 명제들에 관해 서술되는 추론규칙들은 직관주의적 유형론에서는 'A true'와 같은 판단들에 대해 적용되는 것으로 간주된다. 예컨대, 겐첸의 조건문 제거규칙은 ‘A⊃B true’와 ‘A true’라는 두 판단으로부터 ‘B true’라는 판단을 추론할 수 있게 하는 규칙이다.

(표 3)의 각각의 정언적 판단 형식에 상응하는 가언적 판단형식이 있으며, 가장 통상적이며 단순한 가정인 x가 집합 C의 원소라는 판단 $x \in C$ 하에서 그런 판단 형식의 의미는 (표 4)와 같이 설명된다.

(표 4)

가언적 판단 형식	올바른 판단을 하기위해 알아야 할 내용
$A(x)$ set $[x \in C]$	C의 임의의 원소 c에 대해, $A(c)$ set.
$A(x)=B(x)$ $[x \in C]$	C의 임의의 원소 c에 대해, $A(c)=B(c)$.
$a(x) \in A(x)$ $[x \in C]$	C의 임의의 원소 c에 대해, $a(c) \in A(c)$.
$a(x)=b(x) \in A(x)$ $[x \in C]$	C의 임의의 원소 c에 대해, $a(c)=b(c) \in A(c)$.
$A(x)$ true $[x \in C]$	C의 임의의 원소 c에 대해, $A(c)$ true.

가언적 판단의 보다 일반적인 경우는 여러 의존적인 가정들 하에서의 판단이다. 예컨대, A_1이 집합이라는 판단이 증명되고 x_1이 A_1의 원소라는 가정 하에서 $A_2(x_1)$이 집합이라는 판단이 증명된다고 할 때, ‘x_1과 x_2가 각각 A_1과 $A_2(x_1)$의 원소라는 가정 하에서 $A(x_1,x_2)$가 집합이다’는 가언적 판단은 ‘$A(x_1,x_2)$ set $[x_1 \in A_1, x_2 \in A_2(x_1)]$’과 같이 표현된다. 가언적 판단 형식에서 대괄호 안의 표현들의 역할은 겐첸의 정식열(sequent)에서의 전건(antecedent)과 유사하지만, 정식열에서는 전건의 식들의 위치가 (Permutation Rule에 의해) 교환될 수 있는 반면에 가언적 판단의 대괄호 안의 식들은

24) 5절에서 우리는 그 한 이유를 검토하게 될 것이다.

그렇지 않다는 점에서 차이가 있다. 이는 대괄호 안에서의 뒤의 판단이 앞의 판단에 의존할 수 있기 때문이다. 그러나 어떤 명제가 참이라는 통상적 가정(assumption)에 해당하는 판단은 정식열 연산에서와 유사하게 '$x \in A$ $[x \in A]$'로 나타낼 수 있다.

4. 직관주의적 유형론의 추론규칙들

직관주의적 유형론에서 사용되는 표현들은 λ연산과 유사한 표현력을 지니는 표현이론(theory of expression)에 의해 엄밀히 규정될 수 있다. 여기서는 구문론에 해당하는 표현이론을 자세히 제시하지 않고 최소한의 사항만 언급하겠다.[25] 변항과 상항으로부터 구성되는 표현이론의 항들은 함수를 나타내는 것으로 이해될 수 있으며 한 항은 고정된 논항 수(arity)를 지닌다. α가 논항 수가 $n+1$인 항이고 β가 '적절한' 항이면 $\alpha(\beta)$는 논항수가 n인 항이 되며 $(\beta)\alpha$는 논항수가 $n+2$인 항이 된다. (여기서 n은 자연수이다.) $\alpha(\beta)$는 함수 α에 논항 β를 적용한 것(application)을, $(\beta)\alpha$는 α에서 β를 (논항으로) 추상한 것(abstraction)을 나타내는 것으로 이해될 수 있다. 즉 $(\beta)\alpha$는 람다 연산에서 $\lambda\beta.\alpha$에 해당하는 것으로, $(\beta)\alpha(\gamma)=\alpha(\beta/\gamma)$이며 특히 $(\beta)\alpha(\beta)=\alpha$이다. $(\beta_1)(\beta_2)\alpha$는 $(\beta_1,\beta_2)\alpha$로, $\alpha(\beta_1)(\beta_2)$는 $\alpha(\beta_1, \beta_2)$로 나타낸다. $i \leqq n$에 대해, $(x_1,...,x_n)((x_1,...,x_n).i)$는 투사연산들을 나타낸다. 즉, $\alpha_1,...,\alpha_n$이 항들이면 $(\alpha_1,...,\alpha_n).i=\alpha_i$. 직관주의적 유형론의 추론규칙들은 판단형식의 의미에 관한 앞 절의 설명에 의해 정당화될 수 있는 일반규칙들과 특정한 명제 혹은 집합에 관한 규칙들로 나누어진다. 일반규칙들은 다음 두 규칙 외에 (집합과 원소의)

---

[25] 표현이론에 대한 보다 엄밀하고 완전한 설명을 위해서는 Nordström et al. (1990), 3장을 볼 것. 그 책의 저자들에 의하면, 아직 미출판 상태인 마틴뢰프의 표현이론은 수학적 언어 일반의 구문론으로 의도되었다. 다형유형론과 달리 단형유형론은 표현이론에 의존하지 않고 서술될 수 있다.

동일성 관계가 동치관계(equivalence relation)임을 보장하는 여러 대입규칙들(substitution rules)로 이루어진다.[26)]

Assumption

$$\frac{A \text{ set}}{x \in A \ \ [x \in A]}$$

Proposition as Set

$$\frac{a \in A}{A \text{ true}}$$

명제 혹은 집합에 관한 규칙들은 형성규칙(Formation Rules), 도입규칙(Introduction Rules), 제거규칙(Elimination Rules), 동등성규칙(Equality Rules)의 네 가지 종류로 나누어진다. 형성규칙은 통상적으로 메타언어에서 제시되는 구문론적 규칙과 유사하지만, 이런 통상적인 구문론적 규칙은 특정한 언어표현을 정의하는데 반해, 여기서의 형성규칙은 특정 언어와 무관하게 집합(명제)을 형성하는 규칙이다. 도입규칙은 결론에 나타나는 집합(명제)을 정의하는 역할을 한다. 앞서 직관주의적으로 집합은 그 표준적 원소와 그들 간의 동일성 조건에 의해 정의된다고 하였다. 이에 따라, 도입규칙은 결론에 나타나는 집합(명제)의 표준적 원소를 규정하는 규칙과 그들 간의 동일성 조건을 나타내는 두 가지로 이루어진다. Σ-도입규칙의 $<,>$나 Π-도입규칙의 λ와 같이 결론에 나타나는 집합(명제)의 표준적 원소(증명)가 전제들에 나타나는 집합(명제)의 원소(증명)들로부터 구성되는 방식을 나타내는 연산을 ‘구성자(constructor)’라 하며, 첫 번째 도입규칙은 이런 구성자들에 의거해 표준적 원소를 규정한다. 두 번째 도입규칙은 대체로 전제들의 같은 원소들에 적용된 구성자는 같은 값을 지닌다는 명백한 규칙들이다. 제거규칙은 도입규칙에 의해 정의된 집합 A에 속하는 임의의 원소 v가 어떤 속성 C를 만족한다는 것(즉 C(v))을 보이기 위해서는 그 집합의 모든 표준적 원소들이 그 속성을 만족한다는 것을 입증하는 것으

26) Nordström et al. (1990), 5장 혹은 Martin-Löf (1984), pp. 14-20을 볼 것.

로 충분하다는 이른바 ‘구조적 귀납(structural induction)’에 해당한다.[27] v∈A는 v가 A의 표준적 원소로 환원될 수 있다는 것을, 즉, v가 A의 어떤 표준적 원소와 같다는 것을 의미하므로, 제거규칙은 도입규칙에 의해 정의된 집합(명제)의 의미에 의해 타당한 규칙이라 할 수 있다. ∑-제거규칙의 split이나 Π-제거규칙의 funsplit과 같이 제거규칙의 결론에 나타나는 연산자를 선택자(selector)라 한다.[28] 동등성 규칙은 표준적 원소에 적용된 선택자의 값을 규정하며, 이 규칙은 프라위츠의 정형화 정리에서의 환원규칙에 대응한다.[29] 집합(명제)에 관한 규칙들 중 직관주의 논리를 해석하기에 충분한 규칙들만 나타내면 (표 5)와 같다.[30] (표 5)에 나타낸 규칙들은 완전한 형태는 아니다. 특히, 가언적 판단을 일반적 형태로 나타내지 않고, 규칙의 적용에 의해 의존이 해제(discharge)되는 가정만 나타내었다. 예컨대, 가언적 판단이 전제에 나타나지만 결론이 정언적 판단인 경우, 가언적 판단에 나타난 가정이 해제되는 규칙임을 나타낸다. Π-제거규칙과 Π-동등성규칙의 세 번째 전제에 해당하는 가언적 판단은 그 가정 또한 가언적 판단임에 유의할 필요가 있다. 앞서 언급한대로, A와 B가 집합인 경우, A×B는 ∑(A,(x)B)로, A→B는 Π(A,(x)B)로 정의되며, A&B는 A×B로, A⊃B

27) Nordström et al. (1990), p. 39.

28) 각 제거규칙에서의 선택자(selector) 연산이 어떻게 계산되어야 할지는 그에 상응하는 도입규칙에 의해 정의된 집합(명제)과 제거규칙의 전제로부터 읽을 수 있다. 예컨대 funsplit(f,d)를 계산하기 위해서는 우선 f를 평가하여 그 값이 Π(A, B)의 표준적 원소 λ(b)인 경우 - Π 제거규칙의 첫 번째 전제에 의해 그런 값이 있게 마련이다 - funsplit(f,d)의 값은 d(b)가 되며, λ(b)가 Π(A, B)의 표준적 원소인 경우 b(x)∈B(x) [x∈A]란 조건을 만족하므로, Π제거규칙의 세 번째 전제에 의해서 d(b), 즉, funsplit(f,d)는 C(f)의 원소(증명)가 된다. 다른 선택자 연산들의 계산 방법에 대한 확인을 위해서는 Nordström et al. (1990)을 볼 것.

29) Martin-Löf (1984), p. 24.

30) (표 5)의 규칙들은 기본적으로 Nordström et al. (1990)에서 인용되었다.

는 $A \rightarrow B$로, $\perp$는 $\{\ \}$으로 정의된다. A가 집합이고 B가 A에 대한 집합족인 경우, $(\exists x \in A)B$는 $\Sigma(A,B)$로, $(\forall x \in A)B$는 $\Pi(A,B)$로 정의된다. 이런 정의와 (표 5)의 규칙들에 의해 직관주의적 유형론이 직관주의적 일차논리를 포함한다는 사실은 명백하다. 직관주의 논리의 도입규칙들과 제거규칙들은 (표 5)의 도입규칙들과 제거규칙들에서 증명대상에 대한 언급을 생략하고 대신에 'A true'형식의 판단을 사용하여 얻어진다. 예컨대 통상적인 $\perp$ 규칙은, $\perp$는 정의에 의해 $\{\ \}$와 같으므로, $\{\ \}$-제거규칙 1에 의거해 정당화된다. 즉, A를 임의의 명제라 하면, $(x)A$를 $\{\ \}$-제거규칙 1의 C로 간주하면, 임의의 명제 A에 대해, '$\perp$ true'란 전제로부터 'A true'란 결론이 따라 나온다. 그렇게 얻어진 규칙들은 이른바 일반화된 자연연역 체계의 규칙들(generalized natural deduction rules)로서, 겐첸의 직관주의적 일차논리의 규칙들은 그 특수 경우가 된다.[31)]

판단의 증명과 명제의 증명(증명대상) 간의 혼동을 피하기 위해, 마틴뢰프를 따라 직관주의적 유형론에서와 같은 판단의 증명을 '입증(demonstration)'이라 하자.[32)] 추론규칙들의 적용 사례로, A가 명제일 경우 '$A \equiv \Sigma(A,(x)A)$ true'라는 판단을 입증해 보자. 명제 $A \equiv \Sigma(A,(x)A)$는 정의에 의해 $(A \supset \Sigma(A,(x)A))\&(\Sigma(A,(x)A) \supset A)$와 같고, 이는 다시 정의에 의해 $A \rightarrow \Sigma(A,(x)A)$와 $\Sigma(A,(x)A) \rightarrow A$의 증명에 의해 입증되며, 이들은 다시 정의에 의해 $\Pi(A, \Sigma(A,(x)A))$와 $\Pi(\Sigma(A,(x)A),A)$의 증명에 의해 입증된다. (표 6)의 두 도출은 각각 'A set'의 전제로부터 이 두 명제의 증명대상들을 구성한다.

---

31) 슈뢰더-하이스터(P. Schröder-Heister) 등에 의해 고안된 일반화된 자연연역 체계는 특히 제거규칙들을 겐첸의 선언제거규칙과 같은 형식으로 제시하며, 이는 증명대상을 명시적으로 도입하면 (표 5)의 제거규칙들과 같이 이른바 '구조적 귀납'에 의거해 제시된 규칙들에 해당한다. Nordström et al. (1990) (특히 p. 60과 p. 90) 및 Martin-Löf (1984)을 볼 것.

32) 예컨대 Martin-Löf (1996), p. 107.

(표 5)

Π-formation $\dfrac{A\ \text{set} \quad B(x)\ \text{set}\ [x\in A]}{\Pi(A,\ B)\ \text{set}}$	Π-introduction 1 $\dfrac{b(x)\in B(x) \quad [x\in A]}{\lambda(b)\in\Pi(A,\ B)}$	Π-introduction 2 $\dfrac{b(x)=d(x)\in B(x) \quad [x\in A]}{\lambda(b)=\lambda(d)\in\Pi(A,\ B)}$	
Π-elimination $\dfrac{\begin{array}{l} f\in\Pi(A,\ B) \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in\Pi(A,\ B)] \\ d(y)\in C(\lambda(y))\ [y(x)\in B(x)\ [x\in A]] \end{array}}{\text{funsplit}(f,d)\in C(f)}$	Π-equality $\dfrac{\begin{array}{l} b(x)\in B(x)\ [x\in A] \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in\Pi(A,\ B)] \\ d(y)\in C(\lambda(y))\ [y(x)\in B(x)\ [x\in A]] \end{array}}{\text{funsplit}(\lambda(b),d)=d(b)\in C(\lambda(b))}$		
Σ-formation $\dfrac{A\ \text{set}\ \ B(x)\ \text{set}\ [x\in A]}{\Sigma(A,\ B)\ \text{set}}$	Σ-introduction 1 $\dfrac{a\in A \quad b\in B(a)}{\langle a,b\rangle\in\Sigma(A,\ B)}$	Σ-introduction 2 $\dfrac{a=c\in A \quad b=d\in B(a)}{\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle\in\Sigma(A,\ B)}$	
Σ-elimination $\dfrac{\begin{array}{l} c\in\Sigma(A,\ B) \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in\Sigma(A,\ B)] \\ d(x,y)\in C(\langle x,y\rangle)\ [x\in A,\ y\in B(x)] \end{array}}{\text{split}(c,d)\in C(c)}$	Σ-equality $\dfrac{\begin{array}{l} a\in A \\ b(x)\in B(x)\ [x\in A] \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in\Sigma(A,\ B)] \\ d(x,y)\in C(\langle x,y\rangle)\ [x\in A,\ y\in B(x)] \end{array}}{\text{split}(\langle a,b\rangle,d)=d(a,b)\in C(\langle a,b\rangle)}$		
+-formation $\dfrac{A\ \text{set} \quad B\ \text{set}}{A+B\ \text{set}}$	+-introduction 1 $\dfrac{a\in A \quad B\ \text{set}}{\text{inl}(a)\in A+B}$ $\dfrac{A\ \text{set} \quad b\in B}{\text{inr}(b)\in A+B}$	+-introduction 2 $\dfrac{a=b\in A \quad B\ \text{set}}{\text{inl}(a)=\text{inl}(b)\in A+B}$ $\dfrac{A\ \text{set} \quad a=b\in B}{\text{inr}(a)=\text{inr}(b)\in A+B}$	
+-elimination $\dfrac{\begin{array}{l} c\in\Sigma(A,\ B) \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in A+B] \\ d(x)\in C(\text{inl}(x))\ [x\in A] \\ e(y)\in C(\text{inr}(y))\ [y\in B] \end{array}}{\text{when}(c,d,e)\in C(c)}$	+-equality $\dfrac{\begin{array}{l} a\in A \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in A+B] \\ d(x)\in C(\text{inl}(x))\ [x\in A] \\ e(y)\in C(\text{inr}(y))\ [y\in B] \end{array}}{\text{when}(\text{inl}(a),d,e)=d(a)\in C(\text{inl}(a))}$	$\dfrac{\begin{array}{l} b\in B \\ C(v)\ \text{set}\ [v\in A+B] \\ d(x)\in C(\text{inl}(x))\ [x\in A] \\ e(y)\in C(\text{inr}(y))\ [y\in B] \end{array}}{\text{when}(\text{inr}(b),d,e)=e(b)\in C(\text{inr}(b))}$	
{ }-formation { } set			
{ }-elimination 1 $\dfrac{a\in\{\ \} \quad C(x)\ \text{set}\ [x\in\{\ \}]}{\text{case}(a)\in C(a)}$	{ }-elimination 2 $\dfrac{a=b\in\{\ \} \quad C(x)\ \text{set}\ [x\in\{\ \}]}{\text{case}(a)=\text{case}(b)\in C(a)}$		

(표 6)의 두 도출로부터 $\langle\lambda((x)\langle x,x\rangle),\lambda((x)\mathrm{split}(x,(x,y)((x,y).1)))\rangle$이 $A\equiv\Sigma(A,(x)A)$의 증명대상(원소)임을 입증할 수 있으며, 이로부터 '$A\equiv\Sigma(A,(x)A)$ true'가 ('A set'의 전제에 의해) 입증된다.

(표 6)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\ \mathrm{set}}{x\in A\ [x\in A]}\qquad \dfrac{\dfrac{A\ \mathrm{set}}{x\in A\ [x\in A]}\quad A=(x)A(x)}{x\in(x)A(x)\ [x\in A]}}{\langle x,x\rangle\in\Sigma(A,(x)A)\ [x\in A]}}{\lambda((x)\langle x,x\rangle)\in\Pi(A,\Sigma(A,(x)A))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\nabla 1\quad \nabla 2\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\ \mathrm{set}}{x\in A\ [x\in A,\ y\in A(x)]}\quad A=(x)A(\langle x,y\rangle)}{x\in(x)A(\langle x,y\rangle)\ [x\in A,\ y\in A(x)]}\quad x=(x,y)((x,y).1)(x,y)}{(x,y)((x,y).1)(x,y)\in(x)A(\langle x,y\rangle)\ [x\in A,\ y\in A(x)]}}{\mathrm{split}(c,\ (x,y)((x,y).1))\in(x)A(c)\ [c\in\Sigma(A,(x)A)]}}{\lambda((x)\mathrm{split}(x,(x,y)((x,y).1)))\in\Pi(\Sigma(A,(x)A),(x)A)}$$

여기서 $\nabla 1$과 $\nabla 2$는 각각 다음의 도출이다.

$$\dfrac{\dfrac{A\ \mathrm{set}\qquad \dfrac{A\ \mathrm{set}\quad A=(x)A(x)\ [x\in A]}{(x)A(x)\ \mathrm{set}\ [x\in A]}}{\Sigma(A,(x)A)\ \mathrm{set}}}{c\in\Sigma(A,(x)A)\ [c\in\Sigma(A,(x)A)]}\qquad\qquad \dfrac{A\ \mathrm{set}\quad A=(x)A(v)\ [v\in\Sigma(A,(x)A)]}{(x)A(v)\ \mathrm{set}\ [v\in\Sigma(A,(x)A)]}$$

마틴뢰프의 '집합으로서의 명제' 논제는 명제와 집합을 같은 것으로 취급한다. 그러나 명제를 증명들의 집합으로 간주하거나 명제함수를 집합족으로 간주하는 것은 직관주의자들이 자연스럽게 받아들일 수 있겠지만, 집합을 명제로 취급하거나 집합족을 명제함수로 취급하는 것은 자연스럽지 않게 여겨질 수 있다. 예컨대, 자연수

집합이 어떤 명제로 간주될 수 있는가? 개별적인 자연수가 어떤 명제의 증명으로 간주될 수 있는가? 한 가능한 답은 개별적인 자연수는 '자연수가 있다'는 명제의 증명으로 간주될 수 있다는 것이다. $\sum(N,(x)N)$가 '자연수가 있다'는 명제와 동치라고 간주할 수 있다면, (표 6)의 도출에서 A를 N으로 대치하고 동치관계의 속성을 이용하면, '자연수의 집합에 해당하는 명제는 '자연수가 있다'는 명제와 동치이다'는 명제가 참임이 입증되는 셈이다. 그러나 이로부터 '자연수 집합은 '자연수가 있다'는 명제와 동일하다($N=\sum(N,(x)N)$)'는 판단이 따라 나오지는 않는다. 오히려, N의 표준적 원소는 0과 succ(n)의 형태이고 $\sum(N,(x)N)$)의 표준적 원소는 <n,n>의 형태이므로 ($n\in N$), 이 판단은 옳지 않다.[33]

---

33) $\sum(N,(x)N)$이 '자연수가 있다'는 명제와 동치라는 가정을 정당화하기에는 여러 어려움이 있다. 우선 정의에 의해 $\sum(N,(x)N)$은 N×N, 즉, N&N과 같다. ((표 6)으로부터 'N&N≡N true'가 입증된다.) N이 어떤 명제에 해당하는지 의심스럽다면 N&N도 마찬가지로 의심스러울 것이다. 그러나 한편 $\sum(N,(x)N)$, 즉 $(\exists x\in N)N$의 표준적 증명(원소)은 자연수의 순서쌍이므로, $\sum(N,(x)N)$이 (직관주의적으로) 참이기 위한 필요충분조건은 자연수의 존재이다. 이런 점에서는 $\sum(N,(x)N)$이 '자연수가 있다'는 명제와 동치라는 가정이 어느 정도 설득력이 있다. 어려운 문제들 중의 하나는 '자연수가 있다'는 표현이 명제를 나타내는지, 그 경우 어떤 명제를 나타내는지의 문제이다. '자연수가 있다'는 표현이 무제약적인 존재양화로 이해될 수 있다면, 이는 (직관주의적) 유형론의 기본적 논제 중의 하나인 양화사의 범위는 유형에 국한되어야 한다는 점에 위배된다. 이 점은 직관주의적 유형론의 'A true'라는 판단이 명제로 간주될 수 없는 이유와 관련된다. 'A true'라는 판단은 'A의 증명이 있다'는 판단으로 여겨질 수 있지만, 모든 가능한 증명들의 집합(유형)은 없기 때문에 이는 증명들에 관한 존재양화에 해당하는 명제로 여겨질 수 없는 것이다. (5절 참조.) 통상적으로 '자연수가 있다'란 표현으로 나타내려는 명제가 '어떤 자연수는 자연수이다'란 표현으로 나타낼 수 있다면, N이 그런 명제와 동치임을 나타내는 명제는 직관주의적 유형론에서 입증될 수 있다. 'x는 자연수이다'란 술어에 해당하는 명제함수(집합족)를 N^1이라 한다면, '어떤 자연수는 자연수이다'는 $\sum(N,N^1)$으로 형식화될 수 있고, 마틴뢰프의 N에 관한 규칙들에 의거하여 '$N\equiv\sum(N,N^1)$ true'가 입증될 수 있기 때문이다. 그렇지만 여전히 '$N=\sum(N,N^1)$ true'는 옳지 않은 판단

(표 5)의 도입규칙들은 이른바 '논리적 연산'에 의해 구성되는 복합명제들에 대한 귀납적 정의를 제시하는 것으로 여겨질 수 있다. 그런 정의의 핵심적 생각은 집합이나 명제는 그 표준적 원소(증명)들과 그들 간의 동일성 조건에 의해 규정된다는 것이다. 집합이나 명제의 정의에 관한 이런 핵심적 생각은 논리적 연산에만 적용될 수 있는 것이 아니다. 수학적으로 필요한 어떤 집합이나 명제이든 그 표준적 원소(증명)들과 그들 간의 동일성 조건을 도입규칙에 의해 합당하게 규정할 수 있으면, 이는 논리적 연산에 의해 구성되는 집합이나 명제와 마찬가지로 정당한 정의가 되며 다른 규칙들은 그런 도입규칙에 의거해 결정되고 정당화된다. 이런 이유에서 직관주의적 유형론은 항상 새로운 집합이나 명제를 도입할 수 있는 열려 있는 체계이다. 마틴뢰프는 기존의 직관주의적 수학을 형식화하기 위해 필요한 집합(명제)으로 (표 5)에 나타난 것들 외에, 동일성 명제를 구성하기 위한 연산 Id, 유한 집합을 구성하기 위한 Nk, 자연수 집합 N, 이른바 '작은 집합들의 집합' U, 정열 집합 W 등에 관한 규칙들을 제시하였다. 이런 규칙들은 위에 언급된 핵심적 생각에 의거해 각 집합(명제)을 귀납적으로 정의한다는 점에서 (표 5)의 규칙들과 차별화되지 않으며 이들과 동등한 지위를 지니는 규칙들이다.[34)]

이다. 집합의 명제적 해석에 관한 논의의 예로는 Beeson (1980), pp. 280-281을 볼 것.

34) 이런 규칙들에 관한 서술을 위해서는 Nordström et al. (1990) 및 Martin-Löf (1980)을 볼 것. 페아노 산수(Peano Arithmetic)를 이끌어 내기 위해서는 N뿐 아니라 U의 도입이 필수적이다. (Nordström et al. (1990), p. 97 참조.) 이런 집합들의 도입에 의해 기존의 직관주의적 수학이 형식화될 수 있다는 주장은 직관주의적 집합론이 이런 체계에서 해석될 수 있다는 액젤(P. Aczel)의 결과에 의해 지지받는다. (Aczel (1978) 및 그의 후속 논문들을 볼 것.)

5. 명제와 판단

직관주의적 유형론은 기초론적 및 의미론적으로 새로운 시각을 제시할 뿐 아니라 중요한 함축들을 지닌다. 직관주의적 유형론에 의거한 마틴뢰프 자신의 몇 가지 주장들의 예를 들자면 다음과 같다. 직관주의적 유형론에서는 선택 공리(Axiom of Choice)가 직관주의적으로 정당한 원칙임을 적절히 보일 수 있다.[35] 흥미로운 수학적 판단들은 종합적 판단이라는 점에서 칸트의 주장은 기본적으로 옳다.[36] 절대적으로 결정 불가능한 명제, 즉, 참임이 알려질 수도 없고 거짓임이 알려질 수도 없는 명제는 없다.[37] ‘A는 참이다’는 판단이 옳으면, 명제 A는 참임이 알려질 수 있다.[38] 직관주의적 의미론에 충실한 형이상학에서는 자유의지나 악의 문제가 해소된다.[39] 이런 함축들은 심각하게 검토할 가치가 있는 것들이지만, 여기서는 이런 주장들을 뒷받침하는 한 핵심적인 생각인 직관주의적 유형론에서의 명제와 판단의 구분에 대해 검토해 보도록 하겠다.[40]

앞서 살펴본 대로, 직관주의적 유형론의 두드러진 특징 중의 하나는 추론의 전제와 결론이 명제가 아니라 판단으로 이루어지며, 기존의 수학적 판단들을 몇 가지 기본 형식으로 나타낼 수 있다는 것이다. 그 결과, 명제에 대한 증명을 문제에 대한 프로그램으로 간주할 수 있게 하고 직관주의 수학의 계산적 의미를 잘 드러냄으

---

35) Martin-Löf (1990), pp. 50-52 및 Martin-Löf (2006).

36) Martin-Löf (1994), p. 96.

37) Martin-Löf (1995), p. 195.

38) Martin-Löf (1996), p. 113.

39) Martin-Löf (1991), pp. 148-149.

40) 위에 언급된 논문들은 대부분 명제와 판단의 구분에 관한 논의로부터 시작한다. 이는 마틴뢰프 자신이 위의 논제들을 명제와 판단의 구분에 의존하고 있는 것으로 여기고 있다는 한 증거이다.

로써, 그 체계가 프로그램 논리의 역할을 할 수 있게 하였다. 그러나 직관주의적 유형론은 그 전산적 활용 이전에 수학의 기초체계로 의도되었다. 마틴뢰프의 기본적인 주장 중의 하나는 통상적인 형식 체계들에서는 명제와 판단이 제대로 구분되어 있지 않아서 기초적 체계로서 결함이 있다는 것으로 여겨진다. 따라서 우선적으로 다음 문제들이 검토되어야 한다. 명제와 판단의 올바른 구분은 무엇인가? 명제와 판단이 올바르게 구분되지 않으면 어떤 문제를 야기하는가? 보다 구체적으로, 명제와 판단이 개념적으로 다른 것이라 할지라도, 통상적인 '혼동'이, 즉, 판단은 명제에 주장의 효력을 추가함으로써 얻어지는 것으로 간주하고, 판단을 마치 명제인 것처럼 다루는 전략이 유용한 단순화가 아니라 심각한 문제를 야기하는 혼동이라는 논증이 있는가?

명제와 판단의 역할에 따른 구분은 명제는 논리적 연산이 적용되는 대상이고, 판단은 추론의 전제나 결론이 된다는 것이다.[41] 이에 따르면, 추론(inference)은 함축(implication)이나 귀결(consequence)과는 달리 명제들 간의 관계가 아니다. 예컨대, A와 B가 명제를 지칭하는 표현이라 할 때, 'A로부터 B를 추론할 수 있다'는 표현은 잘못되었거나 'A가 참이라는 판단으로부터 B가 참이라는 판단을 추론할 수 있다'는 표현의 생략된 형태로 간주되어야 한다.[42] 한편 프레게 이후 통상적으로 명제는 참 혹은 거짓인 내용을 지니는 것으로 파악(이해)의 대상이며, 판단은 명제에 주장의 효력이 추가된 것으로, 논리적으로 타당한 추론은 명제들 간의

41) 앞서 언급하였듯이, 추론의 전제와 결론이 판단으로 이루어진다는 논제는 프레게와 러셀과 화이트헤드를 포함한 많은 논리학자들이 받아들인 논제이다. 세부적인 사항에서 마틴뢰프와 견해를 달리하는 프라위츠도 이 논제를 수용한다. Prawitz (2009) 및 (unpublished)를 볼 것.

42) 직관주의적 유형론을 따른 함축 혹은 귀결과 추론의 보다 자세한 구분을 위해서는 Sundholm (1998) 등을 볼 것.

논리적 함축 관계에 의해 설명될 수 있다고 여겨졌다. 마틴뢰프의 기본적인 주장 중의 하나는 프레게 혹은 그 이전부터의 전통적인 구분인 명제와 판단의 구분을 보다 철저하고 엄밀하게 하는 것이 수학기초론과 의미론적 문제들의 해결에 획기적인 진전을 가져온다는 것으로 여겨진다. 따라서 프레게 이후의 명제와 판단의 역할에 관한 통상적인 시각에서 출발하여 직관주의적 유형론에서의 명제와 판단의 구분에 어떻게 도달할 수 있는지 살펴보는 일은 기초론적 이론으로서의 직관주의 유형론에 대한 평가를 위해 매우 중요하다. 다음은 필자 나름대로 그런 과정을 구성하고 검토해 보려는 시도이다.

흔히 주장(assertion)은 판단의 외적 표현으로 간주된다. 따라서 외적으로 표현될 수 없는 판단의 가능성을 무시한다면, 판단과 주장은 마찬가지로 다루어질 수 있다. 판단이나 주장은 근거(ground)나 증거(evidence) 개념과 독립적으로 이해될 수 없을 것이다.[43] 주장의 언어적 관습은 항상 언어 사용자에게 다음과 같은 권리와 의무를 부여한다. 어떤 주장이 제기되면 청자는 항상 그 주장의 근거에 대한 질문을 제기할 수 있으며, 화자는 자신의 주장에 대한 근거를 제시하여야 할 의무가 있다. 판단의 경우 화자와 청자가 같을 수 있지만, (스스로 생각하기에) ‘아무런 근거가 없는 판단’을 내리는 것은 개념적으로 불가능한 일이 될 것이다.[44] ‘자명한(self-evident) 판단’이란 근거 없는 판단이 아니라 다른 근거가 필

43) 판단과 관련해 프라위츠는 ‘근거(ground)’란 용어를 즐겨 쓰고, 마틴뢰프는 ‘증거(evidence)’란 용어를 선호한다. 판단과 근거의 관련에 관한 이 부분의 논의는 Prawitz (2009)와 (unpublished)의 도움을 받았다.

44) 한국어에서 ‘판단’이란 말을 ‘아무런 근거가 없는 판단’이 개념적 모순이 아닌 방식으로 사용할 수 없다는 것은 아니다. ‘판단’이란 말의 그런 사용이 한국어에서 허용된다 하더라도 그런 경우는 ‘막연한 추측’같은 말을 사용하는 것이 더 적절하다고 여겨지지만, 여기서 중요한 점은 그런 의미의 판단은 지금 논의되는 의미의 판단이 아니라는 점이다.

요 없는 판단이라고 해야 할 것이다. 지각적 판단이 수학적 판단의 근거가 될 수 없다고 가정한다면, 수학적으로 올바른 판단은 자명한 판단으로부터 올바른 추론에 의해 도달될 수 있는 판단이며 또 다른 올바른 판단의 근거가 될 수 있는 것들이 될 것이다.

한편 전통적으로 명제는 참 혹은 거짓일 수 있는 것으로서 이해 혹은 파악의 대상으로 간주된다. 논리상항과 같은 연산들은, 고전 논리에서와 같은 진리조건을 통해서이든 직관주의 논리에서와 같은 증명조건을 통해서이든, 보다 단순한 명제나 명제함수들에 대한 파악으로부터 복합 명제들을 파악하는 방식을 제시한다고 할 수 있다. 어떤 명제를 파악하고 표현하는 행위와 그 명제가 참이라고 판단하고 주장하는 행위는 다르다. 이 차이를 설명하기 위해 우선 일상적인 서술문은 맥락에 따라 명제를 표현하는 것으로 이해될 수도 있고 판단을 표현하는 것으로 이해될 수도 있다는 점에 유의하여야 한다. 프레게 이래의 표준적인 기준에 의거하면, 서술문의 사용이 주장의 효력을 지니는 경우 판단을 나타내며, 주장의 효력을 지니지 않는 사용의 경우 명제를 나타낸다. S가 어떤 서술문인 경우, 우리는 때로 서술문 해석에 관한 이런 애매성을 피하기 위해 S가 명제를 나타내기 위해 사용되었을 경우 'S라는 명제'라는 표현을 사용하고 S가 판단 또는 주장을 나타내기 위해 사용되었을 경우 'S라는 판단' 또는 'S라는 주장'이라는 표현을 사용할 것이다. 예를 들자면, '무한히 많은 소수가 있다'는 명제와 '무한히 많은 소수가 있다'는 판단은 다르다. 우리는 돌이가 '무한히 많은 쌍둥이 소수가 있다'는 명제를 파악했는지 의심하지 않더라도, 돌이의 '무한히 많은 쌍둥이 소수가 있다'는 판단의 근거가 옳은지 의심할 수 있다.

A가 어떤 명제일 때 A를 파악하는 행위와 A가 참이라고 판단하거나 주장하는 행위의 차이는 우선 추론과 함축관계의 차이와

관련해 설명될 수 있다. 나는 ‘2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합이다’는 명제와 ‘2^{100}은 짝수이다’는 명제를 파악하지만, 그 두 명제들이 참이라고 판단하기 전에는 이들을 ‘2^{100}은 두 소수의 합이다’는 (명제가 참이라는) 판단의 근거로 사용할 수 없다. 즉, 판단의 근거가 될 수 있는 것은 명제가 아니라 판단이다. 물론 나는 ‘2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합이다’는 명제와 ‘2^{100}은 짝수이다’는 명제는 ‘2^{100}은 두 소수의 합이다’는 명제를 함축한다고 판단하며 이는 ‘만약 2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합이고 2^{100}은 짝수이면, 2^{100}은 두 소수의 합이다’는 (명제가 참이라는) 주장에 의해 표현된다. 그러나 ‘만약 2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합이고 2^{100}은 짝수이면, 2^{100}은 두 소수의 합이다’는 명제를 파악하는 행위와 그 명제가 참이라고 판단하는 행위는 다르며, 또한 후자는 ‘2^{100}은 두 소수의 합이다’는 (명제가 참이라는) 판단과도 다르다.

이런 논지를 따라 판단의 근거가 될 수 있는 것은 명제가 아니라 판단이라는 논제와 추론은 근거에 의거해 판단을 내리는 수단이라는 전통적 견해를 받아들인다면, 추론의 전제와 결론은 명제가 아닌 판단으로 이루어진다는 점을 받아들여야 할 것이다. 이 점은 주장의 언어적 관습에 해당하는 것이 명제의 파악에는 해당하지 않는다는 논제에 의해 더욱 강화될 수 있다. 앞서 언급한 대로 판단하고 주장하는 행위에는 항상 청자의 권리와 화자의 의무가 수반된다. 그러나 명제를 파악하는 행위에는 그런 권리와 의무가 수반되지 않는다. 여기서 명제의 파악(행위)과 명제를 파악했다는 판단(행위)을 혼동하여서는 안 된다. 어떤 이가 어떤 명제 A를 파악했는지 여부에 관한 가장 좋은 테스트는 그가 이해하는 언어에서 A를 표현하는 문장 S의 의미를 이해했는지에 관한 테스트일 것이다. 그나 다른 화자는 ‘그가 A를 파악하였다’ 또는 ‘그가 S의 의미를 이해하였다’는 판단과 주장을 할 수 있으며 청자는 그 주장의

근거를 물을 권리가 있으며 화자는 근거를 제시해야 할 의무가 있다. 그러나 여기서도 권리와 의무는 판단 혹은 주장행위에 수반되는 것이지 명제의 파악행위에 수반되는 것이 아니다.

위의 논의에 의거한 명제와 판단의 구분은 추론은 근거 있는 판단을 내리기 위한 방법이라는 전통적 논제를 받아들이는 사람에게는 대체로 수용될 수 있을 것이다.[45] 특히 위의 논지는 직관주의의 특수한 주장에 의존하지 않는 것으로 여겨지므로 프레게를 비롯한 고전수학자들도 대체로 수용할 수 있을 것으로 여겨진다. 필자의 견해로는, 직관주의적 유형론이 직관주의 및 유형론적 논제에 의존하는 점은 명제와 명제적 진리의 본성 및 판단형식에 관한 사항이다. 이 점을 살펴보자.

프레게 자신 추론은 명제로 이루어지는 것이 아니라 판단 혹은 주장으로 이루어진다고 여겼으며, 명제의 파악과 판단 행위 — 명제가 참이라는 인식 — 및 판단의 표현으로서의 주장을 구분하였다.[46] 위의 논지나 프레게의 주장으로부터, A가 명제일 때 ‘A가 참이다’는 명제가 있을 수 없다는 것이 따라 나오지는 않는다. 다

45) 엄밀히 말해 위의 논지는 (명제를) 파악하는 행위와 (명제가 참이라고) 판단하는 행위의 차이를 보이는 것이지, 명제와 판단의 차이를 보이는 것은 아니라는 지적이 제기될 수 있다. 그러나 명제는 파악의 대상 혹은 산물이고, 판단은 그 자체로 행위이거나 명제의 파악과는 다른 행위의 산물이라고 - ‘판단(judgement)’이라는 용어는 이런 중의성을 지닌다 - 여겨질 수 있다면, 위의 논지로부터 명제와 판단의 중요한 차이를 이끌어 낼 수 있을 것이다. 그렇지만, 마틴뢰프가 이런 논지에 기초한 명제와 판단의 구분에 동의할 지는 불분명하다. 마틴뢰프는 판단(의 증명)은 인식 행위이고 이는 이해 행위라고 주장한다. (예컨대 Martin-Löf (1987), p. 417.) 마틴뢰프가 의도한 이해 행위가 명제의 파악 행위와 같은 것이라면, 그의 명제와 판단에 관한 구분을 위의 논지에 의해 지지하기는 힘들 것이다. 그러나 필자는 마틴뢰프가 의도한 이해 행위는 판단의 증명(demonstration)에 관한 이해로서, 명제의 파악 행위와는 구분되어야 한다고 생각한다.

46) Frege (1918-19), pp. 355-356.

만, ‘A가 참이다’는 명제가 있다면, 그런 명제와 ‘A가 참이다’는 판단은 구분되어야 한다는 것이다. ‘A가 참이다’는 판단형식의 필요성을 받아들인 점에서는 프레게와 마틴뢰프가 일치한다. 그러나 프레게는 다른 판단형식을 도입할 필요성을 인정하지 않았지만 마틴뢰프는 견해를 달리 하였다. 이런 차이의 한 이유는 명제의 본성에 관한 견해 차이에서 찾을 수 있다. 명제는 참 혹은 거짓이라는 판단을 내릴 수 있는 어떤 것이다. 프레게는 명제가 고전적인 진리조건에 의해 설명된다고 여겼지만, 직관주의자들에 의하면 명제는 BHK 해석에서와 같은 구성적인 증명조건에 의해 설명되어야 한다.[47] 프레게는 진리개념을 다른 보다 기본적인 개념으로 환원될 수 없는 원초적인 것으로 여겼으며, 나아가, 어떤 명제와 그 명제가 참이라는 판단은 주장의 효력 유무에 차이가 있을 뿐이므로, 진리조건을 결정하는 명제의 논리적 형식에 관한 올바른 분석이 주어지면 어떤 명제가 참이라는 판단형식 이외에 다른 판단형식을 도입할 필요가 없다고 여겼을 것이다.[48] 그러나 BHK 해석에서와 같은 증명조건에 의해[49] 규정되는 명제에 적용되는 진리개념은 원초적인 것이 아니다. 직관주의적으로 올바른 진리개념이 무엇인지에 대해서는 심각한 논란이 있지만, 마틴뢰프는 참인 명제는 그 증명대상이 존재하는 명제로 간주한다. 따라서 A가 참이라는 판단이

---

47) 여기서 고전적 명제개념과 직관주의적 명제개념 중 어느 것이 옳은가에 대한 평가는 시도하지 않겠다. 고전적 명제개념에 대한 비판과 직관주의적 명제개념에 대한 옹호 논증 중 대표적인 것은 덤밋의 논증에 토대하는 것으로, 직관주의적 명제와 달리 고전적 명제는 우리가 파악할 수 있는 대상이 되지 못한다는 것이다.

48) 프레게의 “논리학의 과제는 (명제들에 적용되는) 진리의 법칙들을 발견하는 것이고, ‘진리’란 말의 의미는 진리의 법칙들에 의해, (즉, 논리법칙들에 의해) 규명된다”는 주장은 이런 해석을 뒷받침한다. (Frege (1918-19), p. 352 참조.)

49) 명제와 판단 혹은 주장의 구분이 혼동되어서는 안 된다면, (명제의) 증명조건과 (주장의) 주장조건도 혼동되어서는 안 된다.

옳기 위해서는 A의 증명이 있어야 하며, A가 참이라는 판단의 근거가 될 수 있는 것은 어떤 특정한 구성(증명대상)이 A의 증명이라는 판단이다.[50] 어떤 명제가 참이라는 판단은 그 명제의 증명이 있다는 판단에 해당한다.[51] 이런 판단은 존재판단으로 특정한 증명대상이 그 명제의 증명이라는 판단과는 다른 형식이다. 따라서 'A가 참이다'는 판단 형식 외에 최소한 'a가 A의 증명(원소)이다'는 판단 형식을 인정해야 한다.

직관주의적 전제에만 의존하는 위의 논지에는 문제가 제기될 수 있다. 프레게 이후의 통상적인 논리체계에서는, 판단 혹은 주장은 명제에 주장의 효력을 추가함으로써 얻어지고, 'A가 참이다'는 명제는 명제 A와 동치라고 간주되어, 명제의 논리적 형식과는 별도로 판단의 형식을 구분할 필요성이 있다고 여겨지지 않았다. 마찬가지로, 'A가 참이다'는 판단 형식과 'a가 A의 증명(원소)이다'는 판단 형식을 추가적으로 도입하는 번거로움 대신에, 'A가 참이다'는 명제와 'a가 A의 증명(원소)이다'는 명제를 도입하고 'A가 참이다'는 판단과 'a가 A의 증명(원소)이다'는 판단은 앞의 각각의 두 명제에 주장의 효력을 추가해서 얻어지는 것으로 여겨질 수 없는 이유가 있는가?

필자는 그 한 이유를 직관주의와 결합된 유형론적 전제에서 찾을 수 있다고 생각한다. 필자가 의도하는 유형론적 전제란 '명제함

---

50) 물론 이는 4절에 소개된 직관주의적 유형론의 propositions as sets 규칙에 해당한다.

51) 마틴뢰프는 때로는 'A가 참이다'는 판단을 무엇이 A의 증명인지 완전한 정보를 제시하지 않는다는 의미에서 '불완전한 판단(incomplete judgement)' 혹은 '부분적 판단(partial judgement)'으로 간주한다. 이는 존재양화에 관한 힐버트(D. Hilbert)의 해석과 유사하게 여겨지지만, 마틴뢰프가 'A가 참이다'는 판단을 명시적으로 존재판단이라고 할 때에는 힐버트의 해석과 같은 것을 염두에 두었다고 생각되지 않는다. 존재판단에 관한 추가적 설명은 곧이어 제시될 것이다.

수는 항상 유의미한 적용영역을 지니고 있다'는 것이다. 이 전제에 의하면 명제함수에 적용되는 존재양화사는 특정한 유형에 해당하는 적용영역을 지니고 있다. (직관주의적 유형론에서 존재양화사의 적용 영역은 '$\sum(A,B)$' 혹은 '$(\exists x \in A)B$'에서와 같이 항상 명시적으로 표현된다.) 위에 언급된 통상적인 전략을 적용하기 위해서는 'A가 참이다'는 판단, 즉, 'A의 증명이 있다'는 존재판단에서 주장의 효력을 제거하면 존재양화에 해당하는, 즉 $\sum(A,B)$ 형식의 명제를 얻을 수 있어야 한다. 그러기 위해서는 존재양화사의 적용영역이, 이 경우 증명들의 전체가, 유형이어야 한다. 그렇지만, 증명들의 전체는 유형일 수가 없다. 이는, 앞서 언급한 대로, 유형 혹은 집합은 기본적으로 귀납적 정의에 의해 구성될 수 있는 것이지만, 증명들의 전체는 그런 방식으로 얻어질 수 없다는 것이 직관주의적 증명 개념의 기본적인 사항이기 때문이다.[52] 유사한 이유에서 'a가 A의 증명(원소)이다'는 판단도 'a가 A의 증명(원소)이다'는 명제에 주장의 효력을 추가함으로써 얻어질 수 있는 것이 아니다. 예컨대 'x는 X의 증명이다'는 이항 명제함수를 나타내는 표현으로 여겨질 수 없다. 의도된 명제함수를 나타내기 위해서는 X가 임의의 명제가 될 수 있어야 하지만, 명제들 전체는 귀납적으로 정의될 수 없어서 유형에 해당하지 않기 때문이다.[53]

---

52) 여기서의 논지는 덤밋의 무한정 확장가능성에 의거한 논지와는 다르다. 직관주의적 증명개념은 무한정 확장가능한 개념이겠지만, 덤밋의 주장은 무한정 확장가능한 영역에 대한 양화가 불가능하다는 것이 아니라, 무한적 확장가능한 영역에 대한 양화는 직관주의적으로 이해되어야 한다는 것이다. (정인교 (2009) 참조.)

53) Martin-Löf (1984), p. 3. X가 특정한 명제 A로 대치될 경우, 이는 (단형 유형론에서) A의 증명(Proof(A) 혹은 elem(A))에 해당하는 유형이 된다. (Martin-Löf (1994), p. 92을 볼 것.) 여기서의 유형개념은 다형유형론에 부합하는 것으로, 단형유형론의 경우는 추가적인 고려를 필요로 하는 것으로 보인다. 유형을 집합 혹은 명제보다 더 원초적인 것으로 간주하는 단형유형론에서는 집합들 혹은 명제들의 유형을 도입할 수 있기 때문이다.

판단 형식 구분의 필요성에 관한 위의 논지는 필자가 판단하기에는 어느 정도는 마틴뢰프의 의도에 부합되게 구성된 것으로 직관주의와 결합된 유형론적 전제에 의존한다. 따라서 위의 논지를 완성시키기 위해서는 직관주의와 결합된 유형론적 전제를 정당화하여야 한다. 마틴뢰프가 의도하는 논지가 정확히 어떤 것인지, 특히 그가 그런 전제에 관한 정당화와 함께 판단 형식의 구분 필요성에 관한 논지를 제시하였는지는 분명하지 않다. 마틴뢰프와 준홈(G. Sundholm)은 모두 명제, 증명대상, 명제적 진리, 귀결은 비인식적 개념인데 반해, 판단, 입증, 판단의 옳음, 추론은 인식적 개념임을 강조한다.[54] 명제가 파악 혹은 이해의 대상이라는 점에서 명제나 증명대상도 인식적 개념으로 간주할 수 있지 않느냐는 반론이 있을 수 있다.[55] 마틴뢰프의 비인식적 개념과 인식적 개념의 구분의 한 근거는 명제는 그 증명이 어떻게 구성되는지를 제시함으로써 정의되는 반면, 판단은 우리가 옳은 판단을 내리기 위해서 알아야 할 것이 무엇인가를 제시함으로써 정의된다는 것이며, 판단행위는 곧 인식행위라는 것이 관련된 근거이다.[56] 이런 논제들로부터 위의 논지를 대치할 수 있는 더 강력하고 근본적인 논지를 제시할 수 있는지는 따로 깊게 검토되어야 할 문제이다. 그런 논지의 성공가능성을 유보하더라도, 필자의 논지가 옳다면, 그리고 직관주의와 결합된 유형론적 전제를 정당화할 수 있다고 가정한다면, 직관주의적 유형론은, 비록 그 현재의 형태가 통상적인 체계들보다 더 복잡해 보일지라도, 올바른 방향의 기초론적 체계이다.

---

54) 예컨대 Martin-Löf (1996), p. 107 및 Sundholm (1997), p. 3을 볼 것.

55) 이와 관련된 논쟁으로는 Sundholm (2000) 및 Prawitz (2000)를 참고할 것. 프라위츠의 논거는 명제가 파악의 대상이라는 점에 있지는 않다.

56) 직관주의적 유형론을 위해 요구되는 ‘행위로서의 인식’에 대한 인식론적 검토 및 그 중요성에 대한 논의를 위해서는 Van der Schaar (2011)을 참조할 것.

참고문헌

정인교 (1996), "역리와 증명", 『철학』 제47집, pp. 201-237.

정인교 (2009), "무한정 확장 가능성과 양화", 『철학연구』 (고려대) 제38집, pp. 213-248.

Aczel, P. (1978), "The Type theoretic Interpretation of Constructive Set Theory", in McIntyre, A. et al. (eds.) *Logic Colloquium'77*, pp. 55-66, North-Holland.

Beeson, M. (1985), *Foundations of Constructive Mathematics*, Springer, Berlin.

Bishop, E. and D. S. Bridges (1985), *Constructive Analysis*, Springer-Verlag.

Curry, H. and R, Feys (1958), *Combinatory Logic*, Vol. I, North-Holland.

Dummett, M. (2000), *Elements of Intuitionism*, (second ed.) Oxford University Press.

Frege, G. (1918-19), "Thoughts", in B. McGuiness (ed.) *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, pp. 351-372 Basil Blackwell, 1984.

Howard, W. (1980), "The formulae-as-types notion of construction", in Seldin, J. P. and J. R. Hindley (eds.) *To H. B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, London, pp. 479-490.

Martin-Löf, P. (1975), "An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part", *Logic Colloquium 73*, pp. 73-117, North-Holland.

Martin-Löf, P. (1982), "Constructive Mathematics and Computer Programming", in Cohen, L. J. et al. (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*, pp. 153-175, North-Holland.

Martin-Löf, P. (1984), *Intuitionistic Theory of Types*, Bibliopolis, Naples.

Martin-Löf, P. (1985), "On the Meanings of the Logical Constants and the Justification of Logical Laws", *Atti degli Incontri di Logica Matematica, Universita di Sienna*, pp. 203-281. Reprinted in *Nordic Journal of Philosophical Logic* I(1), 1996, pp. 11-60.

Martin-Löf, P. (1987), "Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof", *Synthese* 73, pp. 407-420.

Martin-Löf, P. (1991), "A Path from Logic to Metaphysics", *Atti del Congresso Nuovi Problemi della Logica e della Philosofia della Scienza, Viareggio,* pp. 8-13*, gennaio 1990*, Vol. II, pp. 141-149, CLUEB Bolgna.

Martin-Löf, P. (1994), "Analytic and Synthetic Judgements in Type Theory", in Parrini, P. (ed.) *Kant and Contemporary Epistemology*, pp. 87-99, Kluwer Academic Publishers.

Martin-Löf, P. (1995), "Verificationism Then and Now", in DePauli-Schmanovich, W. et al. (eds.) *The Foundational Debate: Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics*, pp. 187-196, Kluwer Academic Publishers.

Martin-Löf, P. (1996), "Truth and Knowability: On the Principles C and K of Michael Dummett", in Dales, H. G. and G.

Oliveri (eds.) *Truth in Mathematics*, pp. 105-114, Clarendon Press, Oxford.

Martin-Löf, P. (1998), "An Intuitionistic Theory of Types", Sambin, G. and J. Smith (eds.) *Twenty-five Years of Constructive Type Theory*, pp. 127-172, Clarendon Press, Oxford.

Martin-Löf, P. (2006), "100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?", *The Computer Journal* Vol. 49 No. 3, pp. 345-350.

Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (1990), *Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction*, Clarendon Press, Oxford.

Nordström, B., K. Petersson, and J. Smith (2000), "Martin-Löf's Type Theory", in Abramsky, A. S. et. al. (eds.) *Handbook of Logic in Computer Science* Vol. V, Oxford University Press, pp. 1-37.

Prawitz, D. (1965), *Natural Deduction: A Proof-theoretical Study*, Almqvist & Wiksell.

Prawitz, D. (1971), "Ideas and Results in Proof Theory", in J. E. Fenstad (ed.) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, pp. 235-307.

Prawitz, D. (2000), "Comments on the Papers", *Theoria* 64, pp. 283-337.

Prawitz, D. (2009), "Inference and Knowledge", *Logica Yearbook 2008*, pp. 175-192, London: College Publications.

Prawitz, D. (unpublished), "Validity of Inferences", http://people.su.se/~prawd/Bern2006.pdf.

Ranta, A. (1994), *Type-Theoretical Grammar*, Oxford University Press.

Sommaruga, G. (2000), *History and Philosophy of Constructive Type Theory*, Kluwer Academic Publishers.

Sørensen, M. H. and P. Urzyczyn (2006), *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Elsevier.

Sundholm, G. B. (1997), “Implicit Epistemic Aspect of Constructive Logic”, *Journal of Language, Logic and Information* 6, April, pp. 191-212.

Sundholm, G. B. (1998), “Inference, Consequence, Implication: A Constructivist's Perspective”, *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 6, pp. 178-194.

Sundholm, G. B. (2000), “Proof as Acts and Proof as Objects: Some Questions for Dag Prawitz”, *Theoria* 64, pp. 187-216.

Van der Schaar, M. (2011), “The Cognitive Act and the First-Person Perspective: An Epistemology for Constructive Type Theory”, *Synthese*, Vol. 180, No. 3, pp. 391-417.

Thompson, S. (1999), *Type Theory & Functional Programming*, Computing Laboratory, University of Kent.

Troelstra, A. S. and D. Van Dalen (1988), *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, 2 Vols., North-Holland.

고려대학교 문과대학 철학과 교수
Department of Philosophy, Korea University
E-mail: ichung@korea.ac.kr

Propositions and Judgments in the Intuitionistic Type Theory

Inkyo Chung

We explain some basic elements of Martin-Löf's type theory and examine the distinction between propositions and judgments. In section 1, we introduce the problem. In section 2, we explain the concept of proposition in the intuitionistic type theory as a development of the intuitionistic conception of proposition. In section 3, we explain the concept of judgment in the intuitionistic type theory. In section 4, we explain some basic inference rules and examine a particular derivation in the theory. In section 5, we examine one route from the Fregean distinction between propositions and judgments to the distinction between them in the intuitionistic type theory, paying attention to the alleged necessity for introducing different forms of judgments.

Key Words: Martin-Löf, Intuitionism, Type theory, Proof, Proposition, Judgment