논리연구 10-2(2007) pp.109~123

크립키식 양상 의미론의 일차 술어 논리를 통한 번역*

김 범 인

본 논문에서는 양상 논리의 정식들이 일차 논리에서 정의가능하다는 사실을 살펴 볼 것이다. 그 중에서도 특히, 크립키식 양상 해석을 중심으로 일차 논리를 통한 정의가능성을 살펴볼 것이다. 여기서 정의가능성이란, 크립키 해석에서 타당한 정식들에 대응하는 일차 논리의 타당한 정식들을 찾을 수 있다는 것을 의미한다.

【주요어】 양상 논리, 크립키 해석, 정의가능성, 일차 논리, 번역

* 접수완료: 2007. 8. 6 심사 및 수정완료: 2007. 8. 14

양상 논리학은 일반적으로 일차 논리를 통해 표현되기 어렵다고 여겨지며, 그러한 표현이 가능할 지라도 제한적일 수밖에 없다고 생각되곤 한다.[1] 하지만, 이 논문에서는 그 두 체계간에는 상호 번역가능한 측면이 있음을 보이고자 한다.

앞으로 특별한 언급이 없는 한, 양상 논리는 양화된 양상 논리를 의미한다. 명제 논리의 경우는 양화 명제 논리라고 언급할 것이다.

이후의 양상 의미론에 대한 논의에서 언어는 함수기호와 상항기호를 제외할 것이다. (함수기호나 상항기호는 술어를 통하여 정의하는 것으로 간주할 것이다.) 또한, 일차 논리의 논리적 기호로 '¬', '∧','∀'만을 사용할 것이며, 다른 기호들은 정의된 것이라고 가정할 것이다. 양상의 경우도 필연성 기호인 '□'만을 사용할 것이며, '◇'는 정의된 것으로 받아들일 것이다.

1. 일차 논리의 의미론과 양상 논리의 의미론

일차 논리에서의 모형은 주어진 공리들을 만족시키는 구조라고 거칠게 말할 수 있을 것이다. 하지만, 양상 논리의 경우는 일차 논리에서 하나의 구조라고 일컬을만한 세계들의 모임으로 구성되기 때문에 몇 가지 차이점을 지닌다. 이러한 차이점을 구체적으로 지적하기 전에 알아두어야 할 점이 있는데, 그것은 일차 논리는 표준적인 형태의 해석이 보편적으로 통용되지만, 양상 논리의 경우는 해석에 대한 다양한 견해들이 있다는 것이다. 크립키가 제시한 의미론과 휴즈와 크레스웰이 정리한 의미론이 대표적인 것이라 할

1) 양상 논리학을 일차 논리에서 다루려는 시도는 여러 번 있어 왔다. 하지만, 그것들 대부분은 전통적인 의미의 양상 논리학의 해석과 일치하는 해석을 제시하지는 않으며, 일정 정도의 차이점을 가진다. 즉, 번역이라고 일컫기는 어렵다.

수 있을 것이다. 여기서는 일반적으로 가장 많이 사용되는 이 두 가지 견해를 중심으로 다룰 것이다. 이 두 해석은 특히 양화사의 해석에서 차이를 가진다.

양상 논리의 해석은 기본적으로 세계들의 관계를 통하여 이루어진다. 즉, 각각의 세계는 일차 논리의 해석과 같고, 그 세계들간의 관계를 통하여 '□'에 대한 해석이 이루어진다. 따라서 양상 논리에 대한 해석도 세계간의 관계와 각각의 세계로 나누어서 살펴볼 수 있게 된다. 여기서 세계간의 관계라는 것은 보통 '틀(frame)'이라고 표현되는 것이다. 여기서는 아직 각각의 정식에 대하여 어떠한 진리치도 부여되지는 않는다. 각각의 세계는 여기에 더하여, 모든 정식에 대한 진리치도 결정한다. 그러기에, 우리는 모형 M을 말할 때, **틀 F에 기반한 구조** M이란 표현을 쓰기도 할 것이다. 즉, 이 말은 틀 F를 밑에 깔고 있는 구조라는 말이다. 모형은 일차 논리와 마찬가지로 주어진 공리들을 참으로 만드는 구조라고 정의된다.

이것을 강조하는 이유는 가령, T라는 양상 체계의 모형과 T의 틀이라는 표현이 혼동을 가져올 수 있기 때문이다. 우리가 알듯이, T의 틀은 반사성을 만족시켜야 하지만, T의 모형은 반드시 그럴 필요는 없다. T의 모형들, 즉 T의 공리들을 참으로 만드는 구조가 모두 T의 틀을 기반으로 한 모형은 아니라는 것이다.

모형을 좀 더 구체적으로 설명하기 전에, 참거짓을 정의하는 두 가지 방식에 대하여도 살펴볼 필요가 있다.

ㄱ. 모든 세계를 기초로 한 참거짓 T_e : 어떤 문장 ϕ가 구조 M에서 참이라는 것을, M의 모든 세계에서 ϕ가 참일 때라고 정의하는 방식이다.
ㄴ. 현실 세계를 기초로 한 참거짓 T_A : 어떤 문장 ϕ가 구조 M에서 참이라는 것을, M의 현실 세계 A에서만 ϕ가 참이어도 된다고 정의하는 방식이다.

위의 두 정의는 겉보기에 상당히 다른 것으로 보인다. 하지만, S5 명제 논리를 비롯한 여러 양상 체계에서 타당성에 대한 문제를 다룰 때, 위의 두 방식은 양상식에 대해 동치임이 보여질 수 있다. 이 두 정의가 나오게 되는 이유는 타당성에 대한 2가지 개념이 있기 때문이다. 이를 위해서 먼저, 양상 논리의 모형에 대한 설명이 주어져야 할 것이다. 먼저, T_e를 기초로 이것들을 설명하자.

T_e를 기초로 모형에 대한 정의를 정리하면 다음과 같다. 구조 M은 틀 <W,R>을 기초로 한 <W,R,D,f>라고 하자. 여기서 W는 세계들의 집합이며, R은 접근가능성 관계이다. D는 모든 개체들의 집합이며, f는 세계와 원자술어를 독립변수로 취하고 진리값을 치역으로 취하는 이항함수이다. 참일 때는 1로, 거짓일 때는 0으로 준다고 하자. 가령, S5의 틀은 R이 동치 관계인 틀로 제한된다.

구조 M과 할당함수 g가 주어졌을 때, 세계 w에서 정식 ϕ가 참인 경우, $M\models_{(w,g)}\phi$라고 표시하자. 물론, 할당함수란 모든 변항들의 집합을 정의역으로 삼고 D를 공변역으로 삼는 함수를 가리킨다.

구조 M이 주어졌을 때, 그 구조의 세계 w에서 정식 ϕ가 참인 경우 $M\models_{w}\phi$라고 표시하고, 그것의 정의는 모든 할당 함수 g에 대하여, $M\models_{(w,g)}\phi$라고 놓는다.

정식 ϕ가 구조 M에서 참이라는 것을 $M\models\phi$라고 쓰고, 모든 세계 $w\in W$에 대하여 $M\models_{w}\phi$라고 정의하자.

체계 S에 대한 모형이란, S의 모든 공리 ϕ가 모든 세계에서 참인 구조 M을 의미한다. 즉, S의 모든 공리 ϕ에 대하여, $M\models\phi$일 때, M은 체계 S의 모형이라고 한다.

ϕ가 S의 모든 모형에서 참인 경우, $\models\phi$라고 쓰고, 정식 ϕ는 체계 S에서 **타당하다**고 한다.

체계 S에 대한 모든 틀들의 집합 F가 주어졌을 때, 정식 ϕ가 체계 S의 모든 틀에서 참일 때, ϕ는 **틀 F에서 타당하다**고 한다.

T_A를 취할 때, 강조되는 것은 일반적인 타당성이 아니라, 바로 틀 F에 대하여 타당하다는 것이다. 즉, 틀 F에 대하여 타당한 경우와 일반적으로 타당한 경우가 일치하는 경우 T_A를 기초로 참거짓을 간단하게 줄 수 있다. 정식 ϕ가 T_A의 의미에서 틀 F에서 타당하다고 하자. 그러면, F를 기반으로 한 모든 모형 M의 세계 A에서 ϕ는 참이다. 그런데, F는 주어진 체계 S의 틀이므로, 결국 M의 다른 세계를 A라고 해석할 지라도 그 모형은 S의 모형이다. 따라서 ϕ는 T_e의 의미에서 주어진 틀 F에서 타당하다고 할 수 있다. 그런데, 앞에서 틀에서의 타당성과 일반적 타당성이 일치하는 경우라고 하였기 때문에, 결과적으로 ϕ는 T_e의 의미에서 타당하다고 할 수 있다.

T나 B, S4, S5 명제 논리는 두 개념이 일치하기 때문에, T_A도 자주 사용된다. T_A를 기초로 한 모형은 틀이 <W,R>로 주어지고, 구조 M은 <W,R,A,D,f>로 이루어진다. 여기서 A는 어떤 세계가 현실 세계인지를 나타내 주는 것이다. 물론, 모형 M에서의 참 개념도 '모든 세계 $w \in W$에 대하여 $M \vDash_w \phi$' 대신에, $M \vDash_A \phi$로 대치된다.

모형에 대한 개략적인 설명이 끝났으니, 이제 대표적인 두 가지 양화사 해석을 살펴보자.

1) 휴즈와 크레스웰식 해석 I_{HC}

할당함수 g가 주어졌을 때, $M \vDash_{(w,g)} (\forall x)\Psi(x)$는 g와 x에서만 다를 수 있는 모든 할당함수 g'에 대하여 $M \vDash_{(w,g')} \Psi(x)$라고 정

의한다. 또한, 정식 ϕ가 체계 S에서 I_{HC} 의미론에 따라 타당하다는 것을 $\models_{HC}\phi$라고 쓰고, 주어진 체계의 모든 모형 M에 대하여, $M\models\phi$라고 정의한다.

2) 크립키식 해석 I_K

I_{HC}와 가지는 가장 큰 차이점은 전칭 양화사의 해석이다. $M\models_{(w,g)}(\forall x)\Psi(x)$는 g와 x에서만 다를 수 있는 모든 $g'(x)\in D(w)$에 대하여 $M\models_{(w,g')}\Psi(x)$라고 정의한다. 정식 ϕ가 이 의미론에 따라 타당하다는 것을 $\models_K\phi$라고 쓰고, 주어진 체계의 모든 모형 M에 대하여, $M\models\phi$라고 정의한다.

구조를 줄 때도, 각각의 세계에 대한 도메인이 주어지기 때문에, <W, R, D(W), f>로 주어진다.

위의 논의를 기본으로 하면, 4가지 가능한 조합이 있다. 그것은 $I_K + T_A$, $I_{HC} + T_A$. $I_{HC} + T_e$, $I_K + T_e$이다. 이 논문에서는 이중에서도 특히 크립키식 해석이라고 할 수 있는 $I_K + T_e$에 대한 일차 이론을 통한 번역가능성을 살펴 볼 것이다.

2. 양상 모형에 대응하는 일차 이론의 모형

먼저 양화된 양상 체계 S의 공리와 추론 규칙을 제시하겠다. 언어 L은 비논리기호로 술어 기호 P_i들로 이루어졌다고 하자. S는 아래의 기본 공리 도식 6개와 추가적인 공리들을 자신의 공리로 갖는다. 추가적인 공리들은 경우에 따라 달라질 수 있으므로, Σ라고 하자.

양상공리1) 진리 함수적 항진식
양상공리2) $A \rightarrow \forall xA$ (x는 A에서 자유가 아니다.)
양상공리3) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$
양상공리4) $\forall y(\forall xA(x) \rightarrow A(y))$
양상공리5) 등호의 반사성, 대칭성, 이행성.
양상공리6) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
이에 대한 추론 규칙은 다음의 2가지이다.

규칙1) A와 $A \rightarrow B$로부터 B를 추론할 수 있다.
규칙2) A로부터 $\Box A$를 추론할 수 있다.

일차 논리의 언어 L′은 논리기호, W, I, R과 다른 술어 기호 P_i로 이루어졌다고 하자. (뒤에서 보겠지만, 언어 L'은 양상 체계 S의 언어 L과 관련되어있다. L의 각각의 n항 술어 P_i 에 대응하여, L′에는 n+1항 술어 P_i'이 있을 것이다.)

미리 언급해 두건데, 앞으로 사용할 일차 술어 논리에 대한 모형은 일반적인 1차 술어 논리의 모형과 같다.

모형 M과 할당 함수 g가 주어졌을 때, 정식 ϕ가 참인 경우 $M \vDash_g \phi$라고 쓰자.

정식 ϕ가 모형 M에서 참인 경우, $M \vDash \phi$라고 표시하고, 모든 할당함수 g에 대하여, $M \vDash_g \phi$라고 정의하자.

정식 ϕ가 체계 T에서 타당하다는 것을 $\vDash_T \phi$라고 표시하고, T의 모든 모형 M에 대해, $M \vDash \phi$라고 정의한다.

여기서는 논리학에서 일상적으로 취해지는 번역과는 조금 다른 형태의 번역을 고려할 것이다. 서로 언어가 다른 두 체계에서의 번역을 정의할 것이다. 먼저 언어 L로 되어 있는 양상 체계 S를, 다른 언어 L_{KeF}로 되어 있는 일차 논리 KeF로 번역하는 것을 정의하자.

S의 언어 L에 대하여 L_{KeF}는 다음과 같이 정의한다.

L_{KeF}의 정의) L_{KeF}는 L의 각각의 n항 술어 P를 n+1항 술어 P′으로 대치하고 □, ◇를 제거한 후 일항 술어 W, 이항 술어 I, R을 첨가시킨 언어이다.

그 때, 양상 언어 L로 되어 있는 정식 ϕ의 일차 논리로의 번역 ϕ^{β}를 정의하자. 이를 위해, 다음과 같이 ϕ^{β}를 회귀적으로 정의한다.

Ke번역1) ϕ가 원자 정식 $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$이라면, ϕ^{β}는 $P'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$이다.
Ke번역2) $(\neg\phi)^{\beta}$는 $\neg\phi^{\beta}$이다.
Ke번역3) $(\phi\wedge\psi)^{\beta}$는 $\phi^{\beta}\wedge\psi^{\beta}$이다.
Ke번역4) $(\forall\alpha\phi)^{\beta}$는 $\forall\alpha(I\alpha\beta\rightarrow\phi^{\beta})$이다.
Ke번역5) $(\Box\phi)^{\beta}$는 $\forall\gamma(\beta R\gamma\rightarrow\phi^{\gamma})$이다.

I_K + T_e를 정의할 언어 L_{KeF}로 되어 있는 일차 이론 KeF의 공리는 다음과 같다.

KeF1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y(P'x_1 \ldots x_n y \rightarrow Wy)$ (여기서 P는 P_i 또는 I이다.)
KeF2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y(P'x_1 \ldots x_n y \rightarrow \neg Wx_k)$ (P는 P_i 또는 I이고, 모든 $1 \leq k \leq n$에 대하여)
KeF3) $\forall x(\neg Wx \rightarrow \exists y Ixy)$
KeF4) $\forall x \forall y(xRy \rightarrow Wx \wedge Wy)$
KeF5) $\forall x(Wx \rightarrow \exists y Iyx)$
KeF-Σ)모든 $\varphi \in \Sigma$에 대하여, $\forall x(Wx \rightarrow \varphi^{x})$들의 집합 Σ'

S의 모든 공리들은 KAF에서 증명가능하다. 양상공리6)의 경우, 번역하면

$\forall x \forall y(Wy \wedge yRx \rightarrow (A^{x} \rightarrow B^{x})) \rightarrow (\forall x \forall y(Wy \wedge yRx \rightarrow A^{x})$
$\rightarrow \forall x \forall y(Wy \wedge yRx \rightarrow B^{x}))$

이 되고, 이는 일차 논리에서 증명가능하다. 또한, 규칙2)의 경우 $\forall x(Wx \rightarrow A^{x})$에서 $(\forall x \forall y(Wx \wedge xRy \rightarrow A^{y}))$를 추론한다고 번역할 수 있는데, 이 역시 일차 논리에서 추론가능한 것이다. KAF-Σ)는 단순히 Σ의 번역에 불과하다.

이제 언어가 L인 S의 모형 M으로부터 언어가 L_{KeF}인 KeF의 모형 M_{KeF}를 정의하자.

M은 S의 모형으로 < W, R, D(W), f>라고 하자.

이 때 KAF의 모형 M_{KAF}는 다음과 같이 정의된다. 여기서 D(W)는 각각의 세계에 대한 도메인들의 집합을 의미한다.

$$D(M_{KeF}) = W \cup \bigcup_{w \in W} D(w)$$

$$W^{M_{KeF}} = \{w \mid w \in W\}$$

$$I^{M_{KeF}} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in D(y) \wedge y \in W\}$$

$$R^{M_{KeF}} = \{\langle x, y\rangle \mid xRy\}$$

$$P'^{M_{KeF}} = \{\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle \mid f(P^{M}(x_1, \ldots, x_n), y) = 1\}$$

이때,

$$M_{KeF} = \langle D(M_{KeF}), W^{M_{KeF}}, I^{M_{KeF}}, R^{M_{KeF}}, P_1'^{M_{KeF}}, \ldots, P_n'^{M_{KeF}}, \ldots\rangle$$

역으로, KeF의 모형에 대응하는 S의 모형을 정의할 수도 있을 것이다. 즉, KeF의 모형이 하나 주어지면, 그것으로부터 유일하게 S의 모형 M을 구성하는 것이 가능하다. 이는 다음과 같이 정의하면 된다.

$W = \{x | x \in W^{M_{KeF}}\}$
$R = \{< x,y > | < x,y > \in R^{M_{Kef}}\}$
각각의 $y \in W$에 대하여, $D(y) = \{x | < x,y > \in I^{M_{Kef}}\}$
$f(P^M(x_1,\ldots,x_n),y) = 1 \Leftrightarrow < x_1,\ldots,x_n,y > \in P'^{M_{KeF}}$
이 때 M=<W, R, D(W), f>.

이제, S의 언어 L과 그것의 한 모형 M이 주어졌을 때, 위의 정의대로 L_{KeF}와 M_{KeF}를 정의할 수 있다.

L_{KeF}'을 L_{KeF}에 덧붙여 M에 있는 W의 모든 원소를 상항으로 취하는 언어라고 하고, M_{KeF}'을 그 새로운 상항들이 각각 하나의 세계를 지시하도록 해석하는 모형이라고 하자.

그 때, 위의 번역은 양상 언어 L로 되어 있는 정식 ϕ의 L_{KeF}'로의 번역 ϕ^β로 취해진다. 여기서 β는 세계가 들어갈 것이다.

3. 크립키 의미론의 일차 논리의 의미론을 통한 번역가능성

여기서는 크립키 의미론에서 참인 정식들이 2장에서 정의한 KeF의 모형에서도 참임을, 그리고 그 역도 성립함을 보일 것이다.

보조정리 2.1. g가 M과 M_{KeF}'의 공통되는 할당함수라고 할 때,

$$M \vDash_{(\beta,g)} \phi \iff M_{KeF}' \vDash_g (\phi)^\beta$$

증명.
먼저 그 이론들 각각의 공리는 상호 번역가능하다.
이를 정식의 길이에 대한 귀납을 통하여 증명하자.

i) ϕ가 원자정식인 경우

M_{KeF}'의 정의에 의해 성립한다.

ii) 부정이나 연언의 경우도 귀납 가정에 의해 쉽게 증명된다.

iii) ϕ가 $\forall x\psi$인 경우

$M \vDash_{(\beta, g)} \forall x\psi$ <=> g와 x에서만 다를 수 있고 $g'(x) \in \beta$인 모든 할당 함수 g'에 대해, $M \vDash_{(\beta, g')} \psi(x)$

<=> g와 x에서만 다른 $g'(x) \in \beta$인 모든 할당 함수 g'에 대해, $M_{KAF}' \vDash_{g'} \psi(x)^{\beta}$

<=> g와 x에서만 다를 수 있는 모든 할당 함수 g'에 대해, $M_{KAF}' \vDash_{g'} Ix\beta \rightarrow \psi(x)^{\beta}$

<=> $M_{KAF}' \vDash_{g} \forall x(Ix\beta \rightarrow \psi(x)^{\beta})$

<=> $M_{KAF}' \vDash_{g} (\forall x\psi)^{\beta}$

iv) ϕ가 $\Box\psi$인 경우

$M \vDash_{(\beta, g)} \Box\psi$ <=> $\beta R\gamma$인 모든 γ에 대하여, $M \vDash_{(\gamma, g)} \psi$

<=> $\beta R\gamma$인 모든 γ에 대하여, $M_{KAF}' \vDash_{g} \psi^{\gamma}$

<=> 모든 γ에 대하여, $M_{KAF}' \vDash_{g} \beta R\gamma \rightarrow \psi^{\gamma}$

<=> $M_{KAF}' \vDash_{g} \forall\gamma(\beta R\gamma \rightarrow \psi^{\gamma})$

<=> $M_{KAF}' \vDash_{g} (\Box\psi)^{\beta}$

보조정리 2.2. ϕ를 언어 L의 문장이라고 하고 β는 하나의 세계를 지칭한다고 할 때,

$$\phi^{\beta}\text{는 언어 } L_{KeF} \cup \{\beta\}\text{의 문장이 된다.}$$

증명.

이를 정식의 길이에 대한 귀납으로 증명하자.

i) ϕ가 원자정식 $P(x_1, \ldots, x_n)$인 경우

번역 1에 의해, ϕ^{β}는 $P'(x_1, \ldots, x_n, \beta)$이므로 성립한다.

ii) ϕ가 부정이나 연언인 경우도 번역 2와 번역 3, 귀납가정에 의해 성립한다.

iii) ϕ가 $\forall x\psi$인 경우

번역 4에 의해, ϕ^{β}는 $\forall\alpha(I\alpha\beta\rightarrow\phi^{\beta})$이다.

이 역시 귀납 가정에 의해 $L_{KAF}\cup\{\beta\}$의 문장이 된다.

iv) ϕ가 $\Box\psi$인 경우

번역 5에 의해, ϕ^{β}는 $\forall\gamma(\beta R\gamma\rightarrow\phi^{\gamma})$이다.

여기서 γ는 양화사에 의해 구속되므로, $L_{KeF}\cup\{\beta\}$의 문장이 된다.

정리 2.3. ϕ를 언어 L로 된 문장이라고 하자.

$$M\vDash_{\beta}\phi \iff \text{언어 } L_{KeF}'\text{에서, } M_{KeF}'\vDash(\phi)^{\beta}$$

증명.

정의에 의해,

(임의의 g에 대하여, $M_{KeF}'\vDash_{g}(\phi)^{\beta}$)<=> $M_{KeF}'\vDash(\phi)^{\beta}$

$(\phi)^{\beta}$는 보조정리 2에 의해 문장이므로 모든 g에 대해, ($M_{KeF}'\vDash_{g}(\phi)^{\beta}$ <=> $M_{KeF}'\vDash(\phi)^{\beta}$) 정의에 의해, (임의의 g에 대하여, $M\vDash_{(\beta,g)}\phi$)<=> $M\vDash_{\beta}\phi$ 마찬가지로, 모든 g에 대하여, ($M\vDash_{(\beta,g)}\phi$ <=> $M\vDash_{\beta}\phi$) 여기서 두 모형에서 공통인 g를 뽑아 줄 수 있다.

그러므로, 보조정리 1에 의해, 언어 L에서 $M\vDash_{\beta}\phi$ <=> 언어 L_{KeF}'에서 $M_{KeF}'\vDash(\phi)^{\beta}$이다.

따름정리 2.4. ϕ를 언어 L로 된 문장이라고 하자.

$$M\vDash\phi \iff \text{언어 } L_{KeF}\text{에서, } M_{KeF}\vDash\forall x(Wx\rightarrow\phi^{x})$$

증명.

$M\vDash\phi$ <=> 모든 세계 β에 대하여, $M\vDash_{\beta}\phi$

<=> 모든 세계 β에 대하여, $M_{KeF}'\vDash(\phi)^{\beta}$

$<=> \ M_{KeF} \vDash \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^{x})$

따름정리4가 말하는 것은 양상체계 S에 대해, 크립키가 제시한 표준 양상 해석의 모든 모형에 대응하는 일차 논리의 모형을 제시할 수 있다는 것이다. 즉, 표준 양상 해석의 형태로 모형을 제시할 필요는 없고, 일차 논리의 형태로 크립키가 원하였던 방식의 해석을 주는 것이 가능하다는 것이다. 이것을 기초로 따름정리 5를 증명할 수 있다.

정리 2.5. 양상 체계 S가 언어 L로 되어 있고, KeF의 언어가 L_{KeF}라고 하자. 또한, ϕ는 L로 된 문장이라고 하자. 그러면,

$$\vDash_{S}\phi \ <=> \ \vDash_{KeF}\forall x(Wx \rightarrow (\phi)^{x})$$

증명.

$\vDash_{S}\phi$라고 하자.

그러면, 양화된 S5의 모든 모형 M에 대하여, $M \vDash \phi$이다.

그런데, M에 대응하는 KeF의 모형 M_{KeF}가 존재하고, 따름정리15에 의해, $M_{KeF} \vDash \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^{x})$이다.

또한, KeF의 모든 모형에 대하여, 대응하는 S의 모형이 존재한다.

따라서, KeF의 모든 모형 M_{KeF}에 대하여,

$M_{KeF} \vDash \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^{x})$이다.

그러므로, 정의에 의해, $M_{KeF} \vDash \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^{x})$이다.

역방향도 마찬가지로 증명된다.

즉, 정리 5는 양상 체계 S에서 타당한 정식과 KeF에서 타당한 정식이 동일함을 말하여 준다.

보조정리 2.6. M을 양상 체계 S의 모형이라고 할 때, M_{KeF}는 일차논리 KeF의 모형이다.

증명.

$P'^{M_{KeF}}$의 정의에 의해, KeF1)과 KeF2)는 이 모형에서 참이다.

$I^{M_{KeF}}$와 $D(M_{KeF})$의 정의에 의해, KeF3)은 이 모형에서 참이다.

$R^{M_{KeF}}$의 정의에 의해, KeF4)는 이 모형에서 참이다.

양상공리5)에 의해, KeF5)는 이 모형에서 참이다.

번역의 정의에 의해, Σ'은 이 모형에서 참이다.

따름정리 2.7. 양상 체계 S가 완전하며, 언어 L로 되어 있고, KeF의 언어가 L_{KeF}라고 하자. 또한, ϕ는 L로 된 문장이라고 하자. 그러면, $\vdash_S \phi \iff \vdash_{KeF} \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^x)$

증명.

S의 완전성에 의해, $\vdash_S \phi \iff \vDash_S \phi$.

정리 5에 의해, $\vDash_S \phi \iff \vDash_{KeF} \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^x)$.

1차 논리의 완전성에 의해,

$\vDash_{KeF} \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^x) \iff \vdash_{KeF} \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^x)$.

그러므로, $\vdash_S \phi \iff \vdash_{KeF} \forall x(Wx \rightarrow (\phi)^x)$.

위의 논의로부터 크립키 의미론뿐만 아니라, 다른 의미론의 체계들에도 유사한 적용이 가능한지 살펴 볼 필요가 있다는 것을 보여준다. 이러한 작업들은 동시에, 수많은 양상 논리의 의미론적이며, 구문론적 성질들을 일차 이론을 통하여 간접적으로 보일 수 있는 길이 열릴 수도 있을 것이다.

참고문헌

Hughes G. E. and Cresswell M. J.(1996), *A New Introduction to Modal Logic,* Routledge

Kripke, S.A.(1963), "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica,* XVI(1963), pp.83-94

고려대학교 철학과

Email: visionor@hanmail.net

The Translation of Kripke-style Semantics to Fist Order Logic

Beominm Kim

This paper deals with the translation of modal formulas to the fist order logic. Among various modal semantics, I focus on Kripke-style semantics. The translation to first order logic means that we can find the first order system corrsponding Kripke-style, and every formula corresponding the valid fomula in Kripke-style is valid in the first order logic.

[Key Words] Modal logic, Kripke-style semantics, Definability, First order logic, Translation