수학적 참과 증명가능성*
(Mathematical truth and Provability)

정계섭(덕성여자대학교)

【요약문】 수론(Number theory)과 수학 전반에 걸쳐 무모순성을 확립하고자 한 힐버트의 합리주의적 열망은 무모순성을 주장하는 진술 자체가 그 체계 내에서 결정 불가능한 진술이라는 괴델의 두 번째 정리에 의해 좌절된다.

수학의 어떤 문제에서도 수학자가 "Ignorabimus !" (우리는 모른다!) 해서는 안 된다는 힐버트의 낙관 또한 수학에서 증명도 반증도 안되는 결정불가능한 진술의 존재로 인하여 무너진다.

힐버트 프로그램은 일체의 모호함을 배제하고 기호와 기호열에 대한 기계적 연산에 기초하기 때문에 그 충격도 그만큼 클 수밖에 없다. 이 프로그램의 좌절은 그래서 무엇보다도 형식화의 한계를 분명히 보여준다.

이제 수학에서는 통사론적인 증명가능성의 개념이 의미론적인 참의 개념보다 우위를 갖게 되었다. 그리고 그가 제안한 알고리듬(기계적 절차)의 개념은 프로그래밍 언어의 출현에 직접 기여하였다. 그래서 우리는 그의 기획이 비록 좌절했지만 위대한 실패라고 믿고 싶다.

【Abstract】 Hilbert's rational ambition to establish consistency in Number theory and mathematics in general was frustrated by the fact that the statement itself claiming consistency is undecidable within its formal system by Gödel's second theorem.

Hilbert's optimism that a mathematician should not say "Ignorabimus" ("We don't know") in any mathematical problem also collapses, due to the presence of a undecidable statement that is neither provable nor refutable. The failure of his program receives more shock, because his system excludes any ambiguity and is based on only mechanical operations concerning signs and strings of signs.

Above all, Gödel's theorem demonstrates the limits of formalization. Now, the notion of provability in the dimension of syntax comes to have priority over that of semantic truth in mathematics. In spite of his failure, the notion of algorithm(mechanical processe) made a direct contribution to the emergence of programming languages.

Consequently, we believe that his program is failure, but a great one.

【주제어】 수론, 참 [진리], 증명 가능성, 결정 가능성, 튜링 머쉰

【Keywords】 Number theory, Formal system, True [truth], Provability, Decidablility, Turing Machine.

---

* 이 연구는 2005년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행되었다. 아울러 유익하고 소중한 논평을 해주신 익명의 심사위원 세분에게 감사드린다.

1. 들어가면서

수학은 오랜 동안 직관과 연역 사이를 오고 갔다. 연역은 사고의 지주로서 필요하지만, 수학적 대상들은 궁극적으로 인간의 오성에 투명하게 접근 가능해야 하기 때문에 직관을 무시할 수도 없는 노릇이다. 우리가 공리들을 증명없이 수용하는 이유도 직관적으로 그것이 타당해 보이기 때문이다.

라이프니츠(Leibniz, 1646~1716)에 와서야 비로소 수학적 추론뿐만 아니라 다른 모든 추론이 직관의 필요성으로부터 벗어난 자율적인 체계, 즉 계산(calculus)이라는 관점이 형성되고, 그는 이를 위해 저 유명한 보편언어(lingua caracteristica universalis)를 제안하기에 이른다. 그래서 사람들이 분쟁을 해소하기 위해 드잡이를 하는 대신에 차분하게 앉아서 “Calculmus!” (자, 이제부터 계산합시다!)라고 할 것을 요청하였다.

19세기에 이르러 G.Boole(1815~1864)은 복잡한 ‘사고의 법칙’을 단순한 계산으로 환원하는 작업에 착수하여 삼단논법의 형식화에 성공한다.

특히 Frege(1845~1925)의 개념어(Begriffsschrift)의 고안은 추론의 계산화라는 라이프니츠의 제안에 대한 대응으로 보아도 무리가 없겠다. 애석하게도 그의 기념비적인 「수론에서의 기본법칙」(Grundgesetze der Arithmetik)에는 Russell (1872~1970)이 발견한 역설이 숨어 있다. 무엇보다도 Cantor(1829~1920)에 의해 개발된 집합론에서도 역설이 발견되었는데, 이 역설들은 수학적 추론의 토대와 본질에 대해 근본적인 의문을 불러 일으켰다.[1)]

수학의 토대에 이렇게 위기가 닥쳤을 때에 수학자들은 그 타당성이 당연하게 여겨지는 공리조차 모순으로 이끌 수 있음을 인식하게 되었다. 모든 개념은 외연을 가지고 있다는 프레게의 공리가 바로 좋은 예이다. “자신에 속하지 않는” 이라는 속성은 하나의 집합

---

1) Burali-Forti(1897)의 역설, 럿셀의 역설(1902), Richard의 역설(1905) 등 불과 몇 년 사이에 발견된 역설들이다.

$R=\{x \mid x \notin x\}$을 구성하는데, 럿셀은 R이 R에 속하는지 아닌지 문제를 제기한 것이다.

역설을 피하기 위해 수학에서 몇 갈래의 학파가 출현하였다. 럿셀과 화이트헤드로 대표되는 논리주의(logicism)는 유형론(Type theory)이라는 처방전을 내놓았는데 그 이론은 다소 복잡하지만 아이디어는 간단하다. 예컨대 $a \in b$라면 b는 a보다 더 높은 유형이 되어야 한다는 것이다. 이렇게 되면 어떤 집합이 자신을 원소로 가지는 일은 없게 된다. 그러나 유형론은 그 근거가 의심스러운 환원공리(reduction axiom)와 무한공리(axiom of infinity)를 필요로 한다는 문제점이 있다.

다음에는 Brouwer(1881~1966)로 대표되는 직관주의이다. 최초의 직관주의자는 Kronecker(1823~1891)로서 그는 정수만이 수용할 수 있는 개념이고 그 나머지(특히 실수)는 인간이 만든 것으로 생각했다. 그에게는 모든 수학적 개념이 유한회의 단계를 거쳐서 구성되어야 하는데, 이러한 관점에서 보자면 소수(prime number)의 집합은 정당한 수학적 개념이 될 수 없다. 사정이 이러하니 그가 Cantor의 실무한(actual infinity)을 거부한 것은 당연하다고 하겠다. Brouwer는 수학에서 논리학의 법칙이 유효한 범위를 넘어서 적용되어 왔다는 데에 문제를 제기하고, 무한집합에 대한 추론에서 명제들이 필연적으로 참이던가 거짓이던가 둘 중 하나여야 한다는 배중율(law of excluded middle)을 거부하였다.

세 번째로 Hilbert(1862~1948)가 이끄는 형식주의(formalism)가 있는데 이제부터 집중적으로 검토하고자 한다.

이 논문은 소수의 사람들에게만 알려진 난해한 괴델정리를 보다 많은 사람이 이해할 수 있도록 '친절한' (gentle) 안내를 하자는 의도에서 구상되었다. 이를 위해 Gödel(1906~1978) 이전의 Hilbert와 괴델 이후 Turing(1912~1954)을 이해하는 것이 필수적이라고 우리는 판단하였다. 추가로 수학적 진리가 무엇인가에 대한 우리의 성찰도 포함시켰다. 특히 힐버트 기획의 긍정적인 측면을 부각시키려고 노력하였다.

2. 힐버트 프로그램 : 추론의 형식화

어떤 공리계로부터 역설이 나오지 않기 위해서는 공리들을 선정하는 데에서 신중해야 할 뿐 아니라 특히 공리들과 추론규칙을 표현하는 진술들이 적확해야 한다. 힐버트는 역설은 논리에 있는 것이 아니라 논리를 나타내기 위해 사용된 언어에 담겨있는 의미 때문이라고 판단하고, 형식적 방법만이 이 문제에 대처할 수 있는 최선의 방책이라고 생각했다.

이미 그는 1899년 *Grundlagen der Geometrie*에서 감각적 경험과는 무관하게 유클리드 기하학의 형식적 공리학을 제안하였다.[2)] 이미 유클리드 기하학은 공리적 방법의 원형으로 간주되어 왔지만 증명과정에서 시각적 직관에 호소하는 일이 때때로 있다. 힐버트가 더 멀리 형식화 작업에로 나아간 것은 위에 언급된 역설들의 출현에 직접적으로 기인한다. 그는 고전수학을 구하고자 했던 것이다. 공리들과 추론규칙이 일단 정해지면, 기하학의 정리들은 이제 추론규칙의 기계적 적용에 의해 공리들로부터 연역될 수 있게 되었다. 이어서 그는 수학의 어떤 분야에 대해서도 답변을 줄 수 있는 형식적 공리학을 구상하기에 이른다. 직접 그의 말을 들어보자.

> "의사소통의 수단이 일상언어인 의미가 개입된 수학 대신에 최종적으로 우리가 얻는 것은 정해진 규칙에 따라 논리와 수학의 기호로 구성된 서로 연관되는 논리식들뿐이다."[3)]

모든 진술은 기호의 형태로 표현되어야 하고, 이제 연역이란 논리법칙에 따라 **기호와 기호열들에 대한 연산에 다름 아니다.** 왜 그러한가? 기호는 일상언어의 모호성과 직관적 연상에 의한 무의식적인 지식의 사용을 피할 수 있게 해주기 때문이다. 이렇듯 의미는 수학에서 그 어떤 역할도 해서는 안된다고 형식주의자들은 생각했다. 의미라는 대가를 치루고 확실성을 사고자 했던 것이다.

---

2) 힐버트는 "여기에서 사용된 용어는 점 · 선 · 면이지만 그것들이 공리들을 만족시킨다면 테이블 · 의자 · 맥주잔으로 불러도 좋다."라고 말하기를 좋아했다고 전해진다.

3) Hilbert, "Sur l'infini", p.233.

여기에는 엄청난 발상의 전환이 숨어 있다. 주어진 형식체계에서 어떤 정리의 증명은 이제 더 이상 참인 명제를 찾는 것이 아니라, 일련의 기호열들을 변형규칙에 의해 다른 일련의 기호열로 다시 쓰는 것이다. 그래서 **의미론적인 진리의 개념**은 단순히 기호들의 조작 즉 **통사론적인 증명가능성의 개념**에 자리를 내어주게 된 것이다. 그 당시 거의 모든 수학자들은 진리와 증명가능성을 동일시했다는 점을 상기하면 이런 발상은 가히 인식론적 혁명이 아닐 수 없다.

이렇게 되면 증명은 본질적으로 기호들의 기계적 조작이기 때문에 누구나 주어진 논리식이 정리인지 아니지 검증할 수 있어야 한다. 물론 기계는 이 작업을 수행할 수 있어야 한다.

힐버트가 염두에 둔 체계는 Peano(1858~1932)의 산수체계였다. 이 체계는 (1) 인공적인 기호언어, (2) 적형식(wff)을 산출하는 형성규칙, (3) 공리계 그리고 (4) 추론규칙(modus ponens)으로 구성되는데, 여기에서는 공리계만 소개하겠다.

(1) $\sim \exists x\ (0 = Sx)$

(2) $\forall x \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

(3) $\forall x \forall y\ (x + Sy = S(x + y))$

(4) $\forall x \forall y\ (x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$

(5) $[\varnothing(0) \wedge \forall x(\varnothing(x) \rightarrow \varnothing(Sx))] \rightarrow \forall x \varnothing(x)$

왜 산수체계인가?

통상 수학에서 새로운 분야의 토대를 제공하고자 할 때 수학자들은 이미 알려진 수학의 용어에 의해 그 작업을 한다. 고전적인 예로서 복소수를 실수의 쌍으로 해석하는 경우가 그러하다. 나아가서 복잡한 분야에서 수학의 무모순성은 보다 단순한 수학의 무모순성에 의존한다. 이미 그는 유클리드 기하학의 무모순성이 수론의 무모순성으로부터 확립될 수 있다는 것을 보여주었다.[4] 해석학의 무모순성도 산수의 무모순성으로부터 도출된다.

4) 이 때 산수의 무모순성은 증명된 것이 아니라 전제된 것이라는 점이 곧 밝혀질 것이다.

원리적으로 Peano의 이 체계로부터 정수에 관한 모든 속성 즉 대수의 정리들을 연역할 수 있어야 한다.

그래서 1900년 파리에서 개최된 세계 수학자 대회에서 힐버트는 그때까지 수학에서 풀리지 않는 23개의 문제를 제시했는데, 그 중에서 10번째 문제가 바로 여기에 해당된다. 일반적으로 P가 정수 계수를 가진 다항식이라고 할 때 $P(x_1,\ldots,x_x)=0$라는 문제는 정수 $r_1,\ldots r_k$가 있을 때 풀릴 수 있다.

$$P(r_1,\ldots,r_k) = 0$$

예컨대, $f(x,y,z)=fx^3yz^2+3xy^2-x^3-10$을 만족시키는 정수해는 $f(5,3,0)=0$이다.

보다 일반적으로 힐버트의 문제는 유한한 횟수의 연산을 거쳐 정수의 계수를 가진 다항식의 해를 구하는 절차가 존재하는가의 여부를 묻는 문제이다.[5)]

전통적으로 'Goldbach의 추측'으로 불리는 또 다른 문제가 있다. 이 문제는 한낱 추측뿐인 정수에 관한 속성인데, 모든 짝수는 두 소수의 합이라는 사실이다. 이 추측은 컴퓨터에 의해 상당히 큰 짝수에 이르기까지 점검을 해보았으나 반례를 찾지 못하였다. 그러나 대단히 큰 수가 있어 이 추측을 반증하는 사태가 오지 않을 것이라는 것을 아무도 보장 할 수 없다. "0.999....=1"의 증명보다 쉬워 보이는 이 초보적인 추측은 Peano의 산수체계를 비껴 가는 것으로 보인다. 그래서 사람들은 Peano-Hilbert 체계가 불완전하다는 사실을 어렴풋이 알고 있었다고 말할 수 있겠다.

이른바 힐버트 프로그램이란 수학 전체에 대한 완전한 공리군과 추론규칙을 포함하는 형식체계를 확립하려는 거대한 리서치 프로그램인데 이 체계는 몇 가지 조건들을 만족시켜야 한다. 우선 유한주의(finitism)[6)]를 들 수 있는데, 이에 의하면 공리들의 집합은 유한한

---

5) 1970년 Yuri Matajasevič는 힐버트의 10번째 문제를 해결해주는 어떤 알고리듬도 존재하지 않는다는 사실을 증명.

방식으로 기술될 수 있어야 한다. 그렇지 않으면 수학에서 모든 참인 진술을 공리계로 삼을 수도 있기 때문이다. 문제는 유한한 수의 공리를 가지고 어떻게 한 체계 내의 모든 정리들을 연역할 수 있느냐는 것이다. 아울러 하나의 공리는 공리계의 다른 공리들로부터 도출되어서는 안된다는 공리들의 독립성도 지켜야 한다.

그러나 우리의 주제와 직접 관련되는 조건들은 다음의 두 가지이다.

(1) 무모순성(consistency)

채택된 공리계는 하나의 진술 p와 그 진술의 부정 ~ p를 동시에 산출해서는 안된다. 이런 체계는 모순적인 체계가 되어 "1 = 2"와 같은 적형식도 정리가 된다. 예를 들어 (p ∧ ~ p)와 같은 공리를 채택하는 형식체계는 통사론의 규칙을 지키는 모든 적형식(wff)은 정리가 된다. 그래서 힐버트는 **수론과 나아가서 수학 전반에 걸쳐** 무모순성의 증명을 열망했던 것이다.

힐버트는 "수학적 대상의 존재는 그 대상을 규정하는 조건들의 무모순성과 동치이다."라는 Cantor의 주장을 다시 들고 나와 수학에서 무모순성의 증명은 이제 초미의 과제가 되었다. 1900년 Paris 수학자 대회에서 힐버트가 제시한 23개의 문제 중 2번째 문제가 바로 무모순성에 관한 물음이다.

(2) 완전성(completness)

하나의 수학적 속성이 참인지 거짓인지를 결정하는 효율적인 절차(effective procedure)[7]가 존재할 때 "결정 가능"하다고 한다. "약분 가능한"이란 속성은 정수들의 모든 쌍에 대해 결정 가능한데, 우리가 이를 위한 알고리듬 즉 결정절차를 알기 때문이다.

형식체계 내에서 어떤 정리가 주어졌을 때, 힐버트는 이 정리에 대한 증명을 줄 수 있을 만큼 이 체계가 충분히 강력하기를 희망했다. 이를 결정문제(Entscheidungsproblem)라 하는데 수학자는 "Ignorabimus" (우리는 모른다!)라고 말해서는 결코 안된다고 그는 믿었다.

---

6) "만일 p가 소수라면 p보다 더 큰 소수가 있다."라는 진술은 p보다 큰 모든 정수에 대한 진술이므로 유한적(finitary)이 아니다. 그러나 "만일 p가 소수이면 p와 p!+1 사이에 소수가 존재한다." 라는 진술은 p와 p!=1 사이에 있는 정수만 조사하면 되므로 유한적이다.

7) 이 개념은 후에 기계적 절차라는 개념으로 보다 명확해진다.

"모든 수학 문제는 필연적으로 어떤 형태로든지 정확한 결과를 낳게 마련인데, 그 형식은 질문에 대한 정확한 답의 형식을 갖추거나 또는 그 답이 불가능함을 보이는 증명의 형식을 띠고 있다."[8]

그리하여 유한회의 연산(operation)이나 함축(implication)을 통하여 p 또는 ~ p 둘 중 하나의 진술이 정리가 될 때 그런 체계는 완전한(complete) 체계이다.[9]

3. 괴델정리 : 추론의 산술화

괴델(1906~1978)은 직관적 이론에서 사용되는 진리의 개념과 형식체계 내에서의 증명가능성의 차이를 천착하였다. 논리식들의 속성을 연구하는 분야를 메타수학 또는 초수학(metamathematics)이라 하는데, 괴델은 증명가능성이라는 초수학적 속성을 수론(number theory)의 속성으로 번역하는데 성공하였다. 다른 말로 하자면 그는 언어의 서로 다른 수준-대상언어와 메타언어-의 장벽을 극복할 수 있는 수단을 발명한 것이다.[10] 수론은 그 자신의 메타이론을 기술할 수 있는 능력이 있는 것이다.

구체적으로 괴델수의 부여 방식은 초수학적 내용을 수론 안으로 끌어올 수 있게 해준다. "괴델수 x를 갖는 일련의 논리식들은 괴델수 z를 갖는 논리식의 증명이다."와 같은 초수학의 명제가 어떻게 정수 사이의 관계로 환원될 수 있는지 이제부터 알아보도록 하자.

1) 괴델수의 부여

먼저 개별기호들의 목록을 작성한다. 아래에 있는 10개의 상수들은 1부터 10까지의 값을 부여받는다.

~	∃	→	(	)	=	0	S	,	∨
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

8) Hilbert, "Sur les problèmes futurs des mathématiques", p.11-12.

9) 이는 결정가능성과 관련된 개념이며, 어떤 진술이 참이면 증명가능하다는 의미론적 완전성은 별개의 개념이다. 이 점을 지적해주신 심사위원께 감사의 뜻을 전한다.

10) 1930년대 Wittgenstein이 메타언어는 픽션에 불과하다고 한 말을 상기시킨다.

다음으로 수를 나타내는 변항은 10 이상의 소수, 명제변항은 10 이상의 소수들의 자승, 술어변항은 10이상의 소수들의 세제곱을 부여한다.

x	y	z	p	q	r	P	Q	R
11	13	17	11^2	13^2	17^2	11^3	13^3	17^3

이제 하나의 적형식에 괴델수를 부여하기 위해 (∃x) (x = S0) 를 예로 들어보자.

(	∃	x	)	(	x	=	s	0	)
9	2	11	10	9	11	6	8	7	10

마지막으로 일련의 적형식들에 괴델수를 부여하기 위해 괴델수가 각각 m, n인 아래의 예를 들어보자.

(∃x) (x = s0)
(∃x) (x = sy)

이때 이 두 식은 $2^m \times 3^n$ 이라는 괴델수를 부여받는다.

이제까지 어떤 형식적 공리체계에서 표현들(기호, 개별진술, 일련의 진술)의 집합에서 정수의 집합에로 가는 함수를 설정하였다. 이 함수는 단사이다. 즉, 상이한 두 개의 표현들은 반드시 서로 다른 괴델수를 지닌다. 반대로 이 함수는 전사가 아니다. 왜냐하면 괴델수는 소인수분해에 대해 엄격한 조건을 부과하기 때문이다. 또한 소인수와 그들의 지수를 검토함으로써 하나의 정수가 괴델수인지 아닌지 알 수 있으며, 필요하다면 괴델수로부터 시작하여 원래의 표현을 되찾을 수도 있다.

$$
\begin{array}{c}
243000000 \\ \hline
64 \times 243 \times 15625 \\ \hline
2^6 \times 3^5 \times 5^6 \\ \hline
6 \quad 5 \quad 6 \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
0 \quad = \quad 0 \\ \hline
0 \quad = \quad 0
\end{array}
$$

이것은 "="에 5, "0"에 6이라는 괴델수를 부여한 체계에서의 한 예이다.

2) 괴델정리의 핵심 : 대체(Substitution)

대체(Substitution)의 개념이 괴델의 추론에의 가장 핵심적인 개념이다. 지금부터 이에 대해 알아보도록 하자. 다음과 같은 적형식이 있고 그 괴델수는 m이라고 가정하자.

$$m: \qquad (\exists x)\ (x=Sy) \text{ — ①}$$

여기에서 y에 특정값 k를 준다고 하고, 이 식의 괴델수는 j라 할 때, j를 구하는 것은 아무런 문제가 없다. k 대신에 k개 만큼의 SSS...SSS(0)을 대체하면 j를 구할 수 있는 것이다. 그런데 m으로부터 j를 구하는 방법도 있다. 이때 j는 괴델수 m인 표현에서 y (즉 13)에 k를 대입한 표현에 해당하는 괴델수가 될 것이다.

$$\text{sub}\ (m,\ 13,\ k) \text{ — ②}$$

이제 ①에서 y를 이 식의 괴델수인 m으로 대체하면 sub (m, 13, m)가 되는데, 첫 번째 m은 괴델수가 m인 표현에 해당하며, 두 번째 m은 괴델수 그 자체이다. 이 식은 하나의 함수로서 새로운 괴델수를 산출할 것이다.

초수학의 속성을 산술의 언어로 번역하기 위해 괴델은 Dem이라는 술어를 만든다. 이것은 원시회귀함수(primitive recursive function)인데, 계산 가능한 함수라는 정도만 알아두면 우리의 논의를 위해 충분하다. 괴델의 추론에서, "괴델수 x인 표현은 괴델수 z인 표현을 증명한다."를 Dem (x, z)로 나타낸다.

이때 z은 x의 제수(divisor)가 됨을 금방 알 수 있는 것이다. 하나의 정리는 일련의 연역과정에서 마지막 명제이기 때문이다. 다음과 같은 표현을 보자.

$$(x)\ (\sim \text{Dem}\ (x,\ z)) \text{ — ③}$$

이 식이 의미하는 바는, 어떤 형식체계에 주어진 공리로부터 또는 일련의 적형식으로부터 괴델수 z인 적형식을 연역할 수 없다는, 따라서 z는 증명 불가능하다는 것이다.

위에서 언급한 sub (m, 13, m)을 ③에 대입하는 마지막 단계가 남았다.

$$(x)\ (\sim \text{Dem}\ (x,\ \text{sub}\ (m,\ 13,\ m)) \text{ — ④}$$

이 식의 괴델수는 p라고 하고 이제 m 대신에 p를 대입하면,

$$(x)\ (\sim \text{Dem}\ (x,\ \text{sub}\ (p,\ 13,\ p)) \text{ — ⑤}$$

여기에서 sub (p, 13, p)를 n이라고 할 때, n이 의미하는 것은 무엇인가?

n은 괴델수가 p인 식에서 m 대신에 p를 대입한 식의 괴델수가 되는데, 그것은 다름 아닌 ⑤식의 괴델수이기 때문에 바로 자기지시(self-reference)의 진술이 되는 것이다.[11]

---

11) 자기지시의 대목에 이르러 잠시 괄호를 열고 우리의 반(半)자작시를 소개하고자 한다.

> 물은 물을 적실 수 없고
> 불은 불을 태울 수 없으며
> 눈은 스스로를 볼 수 없고
> 손가락은 자신을 가르킬 수 없으며
>
> 칼은 자신을 자를 수 없고
> 저울은 자신을 달 수 없다.
>
> 거울은 자신을 비추어 볼 수 없고
> 우리는 우리 자신을 알지 못한다.

소크라테스의 요청 "너 자신을 알라!"에 대해 "나는 나를 안다."고 답변할 수 있는가? 이 또한 결정불가능 명제가 아닌가? 이제 괄호를 닫는다.

즉, Sub (p, 13, p)를 z라 할 때 ⑤는 바로 다음을 의미한다.

$$\vdash G \leftrightarrow \sim \exists x \, Dem\,(x, z)$$

이 식이 바로 자기지시 문장이다.

G : “This statement is not provable.”

이처럼 증명가능성이란 메타수학적 속성을 번역하는 수론의 논리식을 구축한 것이 바로 괴델의 천재성이다.

P-체계		자연수
A_1		$x=\varnothing(A_1, \cdots, A_K)$
:		$z=\varnothing G$
:	$\xleftrightarrow{[A_1, \cdots, A_K]\text{가 G의 증명열}}$	$Dem(x, z)=1$
$A_K(=G)$	$\xleftrightarrow{\text{아닐 때}}$	$Dem(x, z)=0$

이제 양자택일의 상황만 남았다.

(1) G가 거짓이고 증명가능한 경우 : 모순
(2) G가 참이고 증명불가능한 경우 : 불완전

형식체계 P가 모순이면 유용한 체계가 아니어서 우리는 P가 무모순이라는 강한 동기를 갖고 있기 때문에 거짓 진술을 증명할 수는 없다. 남은 선택은 모순체계보다는 덜 나쁜, P에서 증명할 수 없는 참인 진술이 존재한다는 선택뿐이다. 우리가 P에서 G의 증명불가능함을 보였고 G가 말하는 바가 바로 그것이므로 G는 참이다!

이제 위의 식을 증명의 관점에서 보도록 하자.

위의 식은 $\forall x \sim \mathrm{Dem}\ (x, z)$와 동치이다. 먼저 G가 증명가능하다고 가정하자. 그러면 P에 G의 증명이 존재할 것이고 그 증명열의 괴델수가 n이라면 Dem (n, z)가 된다. 그러나 방금 앞의 식에서 보편양화사를 제거하면 $\sim$Dem (n, z)가 되어 모순이다. 따라서 증명가능하지 않다.

다음으로 $\sim$ G가 증명가능하다고 가정하자.

$$\vdash_{P} \sim G$$

그런데 G는 $\sim \vdash_{P}$ G 이므로 이를 대입하면

$$\vdash_{P} \sim (\sim \vdash_{P} G) \rightarrow \vdash_{P} G$$

이것은 가정과 양립할 수 없다.

결국 G는 $\sim$ G가 증명가능한 경우에만 증명가능하므로 증명도 반증도 할 수 없는 결정불가능 명제이다.

괴델의 제 1정리 : 산수를 형식화 할 수 있고 (또는 수론을 포함하는) 무모순인 모든 형식체계는 이 체계 내에 증명될 수도 반증될 수도 없는 결정불가능한 명제를 가지고 있다.

우선 $\forall x \sim \mathrm{Dem}\ (x, z)$가 엄밀한 의미에서 산술의 진술임을 유념하자. 이렇게 되면 모든 의미있는 수학적 진술이 증명이 되던가 반증이 되던가 반드시 둘 중 한가지이어야 한다는 힐버트의 기대는 무산되는 셈이다.

참고삼아 말하자면, 참의 부정은 거짓이고 그 역도 성립한다. 즉 참과 거짓은 부정에 대해 교환적(commutative)이다. 그러나 증명이 불가능하다고 해서 반증된 것은 아니며 반증이 불가능하다고 해서 증명이 된 것은 아니다. 증명과 반증은 부정에 대해 비교환적(non-commutative)이다.[12)]

괴델의 두 번째 정리는 형식체계 P의 무모순성이 P 내에서 증명될 수 없다는 것이다. P의 무모순성을 P - Cons라 하면 제 2정리는 수월하게 증명된다.

(1) $P - \text{Cons} \rightarrow G$	제 1정리에서
(2) $\vdash (P - \text{Cons}) \vdash G$	1, 규칙 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\vdash p \rightarrow \vdash q)$
(3) $\sim \vdash G$	제 1정리에서
(4) $\sim \vdash (P - \text{Cons})$	2, 3, modus tollens

괴델의 제 2정리 : P가 일관적인 체계이면 P의 무모순을 단언하는 모든 진술은 P 내에서 결정불가능한 진술이다.

이렇듯 문제의 무모순적 체계는 자신이 무모순적이라는 사실을 증명할 수 없다. 힐버트는 수학에서 무모순성을 증명할 수 있다고 확신했기 때문에 제 2정리는 그의 증명이론에 치명타가 된다. 이 정리가 중요한 이유는 무모순성이 증명될 수 없기 때문에 언제 모순이 발견될 지 알 수 없다는 데에 있다.

이제까지 우리는 형식체계의 불완전성에 대해 살펴보았는데 이제부터 그 이유에 대해 잠시 고찰할까 한다. P 내에 참이면서 결정불가능한 진술이 존재한다면 그 원인은 어디에 있을까? 지금으로서는

---

12) 그래서 우리는 증명에 의해 정당화 할 수는 없지만 무언가 참인 진술을 주장할 수 있으며, 또한 상대방이 반증할 수 없는 무언가 거짓된 주장을 할 수도 있을 것이다.

다만 추측(conjecture)과 질문의 수준에 머무르고 있을 뿐이지만 이 문제에 대해 몇 가지 접근로를 가정해 볼 수 있다.

첫째, 체계의 공리계가 불충분한 경우이다. 유클리드 기하학에서 평행선 공리를 제거한 절대기하학은 불완전하다. 그렇다면 수론에서 빠뜨린 공리는 어디에 있는가? 이 공리들은 도대체 무엇인가?

둘째, 이와는 반대로 설사 공리계가 충분하더라도 산술의 모든 참인 진술이 연역될 수 있다는 희망이 애당초 잘못되었는가? 다른 말로 하자면 인간의 수학적 직관과 상상력은 공리계의 틀을 뛰어 넘는가?

셋째, 수학은 우리가 생각하는 것보다 더 경험적인 학문인가? 우리의 생각에 수학에서의 불완전성은 존재론적인 문제와 긴밀하게 결부되어 있는 것으로 보인다. 힐버트처럼 존재의 개념을 모모순성의 개념으로 대체한다 하더라도 문제는 여전히 남는다. P에서 모든 참인 명제를 증명할 수 없는 것은 P에서 존재론이 항시 제한되어 있기 때문이 아닌가? 바로 이 경험적 요소 때문에 수학적 참이 형식적 추론을 비켜가는 것이 아닐까? 뒤에 다시 이 문제를 언급할 기회가 있을 것이다.

4. 튜링 : 추론의 기계화

괴델정리가 나온 지 몇 년 후에 (1937년) 결정가능성의 문제는 튜링(Turing)에 의해 새로운 성격을 띤 진술로 나타난다. 그에 의하면 결정문제는 튜링기계에서 어떤 프로그램을 실행할 때 그 프로그램의 종료를 예측하는 일과 동등하다는 것이다. 그것은 곧 계산가능성(calculability)을 의미한다. 실제 우리는 모든 수학적 속성에

언제나 함수를 결부시킬 수 있으며, 역으로 모든 함수에 언제나 수학적 속성을 결부시킬 수 있다. 예를 들어 수학적 속성 Q(a)는 양가의 집합 { 참, 거짓 }으로 가는 함수이고, 역으로 모든 함수 y = f(x)에 어떤 참된 속성 Q (x, y)를 결부시킬 수 있다. 그래서 하나의 수학적 명제가 참인지 거짓인지 탐구하는 결정의 문제는 각각의 함수 f와 f의 각각의 논항 x에 대해 y = f(x)가 되는 y값을 계산하는 알고리듬의 구축과 동등한 것이다.

결정(불)가능성 ↔ 계산(불)가능성

계산가능성의 탐구하기에 앞서 튜링기계의 기본적인 작동원리를 알 필요가 있다. 그래야만 이 추상적인 기계에 대한 감을 잡을 수 있기 때문이다.

1) 튜링기계의 작동원리

튜링 머쉰은 7개의 항 $< Q, \Gamma, \Sigma, \delta, s, B, F >$으로 주어진다.

- Q : 유한상태들의 집합
- Γ : 리본 위에 쓸 수 있는 출력값
- Σ : 입력값
- s : 초기상태
- $B \in \Gamma - \Sigma$: 빈칸 (#)
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ \leftarrow, \rightarrow \}$
- $F \subseteq Q$: 최종상태의 집합

B는 Γ에 속하는 블랭크(blank)를 의미하고, Σ는 입력의 집합으로서 B를 포함하지 않으며 Γ의 부분집합이다. δ는 다음동작함수(next move function)인데, 예컨대 $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_0, b, R)$은 테이프

헤드가 a를 b로 바꾸고 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 의미한다. 또 $\delta(q_0, B) \rightarrow (q_1, B, L)$은 첫 번째 블랭크를 만날 경우 테이프 헤드는 한 칸 왼쪽으로 이동하면서 최종상태 q_1에서 멈춘다. 별첨에서 주어진 입력자료를 복사하는 튜링기계의 작동방식을 소개하겠다.

2) 정지문제

튜링기계은 일종의 블랙박스로서 어떤 입력에 대해 일련의 계산을 수행하고 결론에 도달하면 기계는 정지하고 출력을 내놓는다. 그렇지 않으면 쉬지 않고 작동하게 된다. 유한한 수의 규칙을 가지고 수행될 수 있는 계산의 종류가 무수히 많듯이 튜링기계의 종류도 무수히 많다.

튜링은 보편튜링기계를 구상하였는데 이 기계는 가능한 모든 튜링기계들을 시뮬레이션할 수 있어서 T_1, T_2, T_3, … 처럼 알파벨 순서로 리스트를 만들 수 있다. 튜링에 의한 괴델정리의 버전은 다음과 같다.

임의의 프로그램의 종료를 예측할 수 있는
보편프로그램을 구축하는 일은 불가능하다.

다른 말로 하자면, 하나의 튜링기계에 주어진 입력에 대해 이 기계가 멈출지 여부를 말해주는 기계적 과정은 존재하지 않는다는 것이다. 이를 증명해보자.

n번째 튜링기계 T_n에 i라는 입력을 주었을 때 결과를 $T_n(i)$라 하자. 여기에서 의문부호는 정지하지 않음을 의미한다.

n \ i	1	2	3	4	5
T_1	5	10	12	?	5
T_2	?	?	4	?	8
T_3	4	?	9	5	?
T_4	?	?	?	4	10
T_5	?	5	?	3	?
D	6	0	10	5	0

모든 n과 i에 대해 $T_n(i)$가 멈출지의 여부를 결정하는 규칙이나 절차가 있다고 가정하자. 그런데 대각선법에 의해 새로운 튜링 머쉰 D를 생각할 수 있는데, 이 기계는 i를 제외한 모든 입력에 대하여 정지하고, i라는 입력에 대해 다음과 같은 결과를 내놓는다.

$T_i(i)$ 가 멈추지 않으면 : 0
$T_i(i)$ 가 멈추면 : $T_i(i) + 1$

그런데 이 기계 D는 앞서 보았던 기계들 중의 하나, 즉 어떤 d에 대해 T_d인 것이다. 그러나 이 기계는 d라는 입력을 가진 T_d와는 다른 답을 주기 때문에 모순을 피할 수 없게 된다.
다른 말로 하자면, 우리는 오직 멈추지 않을 때에 한해서 멈추는 프로그램을 갖게 된 것이다.

이제 결정불가능성에 대응하는 계산 불가능한 함수의 존재를 증명하는 일만 남았다. 튜링은 칸토어가 대각선법에 의해 유리수로부터 어떻게 무리수를 산출하는지 주목하였다.

튜링보다 50년 앞서 칸토어는 모든 분수, 즉 유리수를 하나의 리스트에 집결시킬 수 있다고 생각하였다. 이를 위해 유리수를 무한소수의 형태로 표현하였다.

1	5000000000000000000...
2	3333333333333333333...
3	2500000000000000000...
4	6666666666666666666...
5	2000000000000000000...
6	1666666666666666666...
7	4000000000000000000...
8	7500000000000000000...
⋮	⋮

그리고 대각선 자리에 오는 각각의 숫자에 1을 더하였다. 이렇게

해서 새로 대각선을 따라 만들어진 수는 첫 번째 유리수와 소수 첫째 자리에서 다르고, 예를 들어 695번째 유리수와는 695번째 자리에서 다르므로 이 수는 모든 유리수의 리스트에서 찾아지지 않는다. 이 수는 바로 무리수일 수밖에 없는 것이다!

이제부터 계산불가능한 함수의 존재에 대해 증명할 차례이다. 먼저 모든 계산가능한 함수들의 리스트를 만들었다고 가정하면 i 번째 행에서는 각각의 논항에 따라 서로 다른 함수값을 가질 것이다.

$$f_i(0),\ f_i(1),\ f_i(2),\ \cdots f_i(j)\ \cdots$$

$f_i(j)$는 i 행째 함수에 j번째 열의 논항에 대한 함수값이다. 이제 대각선법에 따라 새로운 함수 δ을 다음과 같이 정의하자.

$$\delta = f_n(n) + 1$$

여기에서 1 대신에 0이 아닌 다른 수를 써도 상관없다. 중요한 점은 모든 n에 대해 δ(n)은 $f_n(n)$과 다르다는 것이다. δ는 계산가능한 함수들의 리스트에 없으므로 계산불가능한 함수일 수밖에 없다. (증명끝)

5. 철학적 관점에서 보는 괴델정리

괴델은 1962년 8월 2일자 Leon Rappaport에게 보낸 편지에서 자신의 정리의 철학적 의미를 간결하고도 분명하게 말하고 있다. 좀 길지만 사안의 중요성에 비추어 전부 인용하겠다.

> "만일 수학에서 만족할 만한 체계와 토대를 갖기 원한다면 수학의 기계화(추상적 실체와 정신의 제거)는 불가능하다는 것을 나의 정리들은 보여준다. 나는 인간정신에 있어 결정불가능한 문제가 존재한다는 것을 증명하지 않았다. 다만 수론의 모든 문제를 결정할 수 있

> 는 기계(맹목적 형식주의)는 존재하지 않는다는 점을 보여주었다. 마찬가지로, 보통의 수학의 형식화에서 무모순의 증명은 없다는 것이 나의 정리로부터 나오지는 않는다. 비록 이런 종류의 증명은 해당되는 형식체계에 포함되어 있지 않은 추론방식을 써야 하겠지만 말이다."

괴델은 여기에서 힐버트 기획의 좌절은 기계론적인 패러다임의 좌절을 의미한다고 말하는 것 같다.

다른 한편, 괴델은 튜링의 작업에 철학적인 오류가 있다고 비판한다.

> "정신을 단순한 기계와 동일시하면서 튜링이 간과한 것은 정신은 정태적이 아니고 끊임없이 전개된다는 사실이다."[13]

괴델 자신의 발언을 유념하면서 이제부터 논의를 괴델정리에 대한 오해에 초점을 맞추면서 전개하고자 하는데 편의상 순서를 정하겠다.

(1) 결정불가능성은 상대적이다. 괴델정리는 '절대적'으로 모든 형식체계에 증명불가능한 진술들의 존재에 대해 주장하는 것이 아니다. 실상 결정불가능한 진술을 증명가능하도록 주어진 형식체계에 하나의 공리를 추가하는 것이 언제나 가능하다. 비록 이 새 체계에서 새로운 비결정명제가 나오기는 하지만 말이다. 또한 무한공리나 집합론의 공리들은 사용하면 수론의 무모순성을 증명할 수 있다. 참고삼아 말하자면, 명제 논리는 결정가능 한 체계이며 술어논리는 반(半)-결정가능한(semi-decidable)[14] 체계이다.

---

13) Cassou - Noguès, Gödel, p.106.

14) 튜링기계에 논리식 A를 입력해서 ① 만일 A가 타당한 식이면 종료하고 "yes"를 내놓고, ② 그렇지 않으면 멈추고 "no"를 주든가 또는 멈추지 않을 때 반-결정가능하다고 말한다.

(2) 괴델정리는 유용한 모든 공리 체계가 불완전하다는 것을 의미하지는 않는다. 유클리드 기하학은 완전한 체계가 될 수 있는 방식으로 형식화할 수 있다.
괴델은 1929년 자신의 박사학위 논문에서 1계술어논리(First order predicate logic)는 모든 논리법칙을 연역하기에 충분한 유한개의 원리들을 줄 수 있다는 의미에서 완성된 학문이라고 하였다. 바로 이것이 술어논리의 완전성 정리(completeness)이다.

(3) 괴델 문장은 자기지시(self-reference)의 테크닉에 의해 아주 복잡한 문장으로서 보통 수학자가 연구하는 분야에서는 볼 수 없는 주변적인, 나아가서 "병적인" 문장으로 취급하고, 그런 상황은 수학의 중요한 분야와는 무관하다고 생각하는 사람들도 있다. 이 판단은 옳지 않으며 연속체가설, 선택공리, 앞에서 나온 디오판테스 방정식 문제 등 결정불가능한 진술은 수 없이 많다.[15] 우리가 튜링을 같이 소개하는 이유도 부분적으로 여기에 있다.

---

15) 각 분야에서 결정 불가능한 명제들을 살펴보자.
- 수론
① 원주율의 전개에서 '777' 또는 '123456789'가 출현하는지의 여부
② 원주율의 전개에서 '10^{1000}'번째 수가 7인지의 여부
③ 원주율의 전개에서 1~9까지가 동일한 확률로 출현하는지의 여부
④ 골드바흐 추측
⑤ 인수분해문제 : 아주 큰 두 개의 소수를 곱해서 얻을 수를 인수분해하는 문제
- 논리학
① 연속체가설 continuum hypothesis
② 선택공리 choice axiom
- 전산학
① 임의의 프로그램 P가 주어진 함수 f(n)을 계산할 수 있는지의 여부
② 두 개의 프로그램 P와 P′이 동치인지의 여부
③ 정지문제 (Halting problem)
④ P=NP? (Cambridge의 Clay Mathematics Institute는 이 문제를 푸는 사람에게 100만불을 주겠다고 제안하였다)

(4) 결정불가능성은 엄밀하게 형식화된 체계에 관한 것으로서 특정 공리계 내의 문제이기 때문에 이를 비형식적 체계에 적용하려는 모든 시도는 잘못된 것이다. 예를 들어 정치가 불완전하다든가 신의 존재는 결정불가능한 명제라든가 하는 것은 넌센스에 불과하다.

(5) 괴델정리를 인간 이성의 무능력의 징후로 보는 사람들도 있다. 이런 해석은 주의를 요하는데 우리로서는 오히려 그 반대의 해석을 하고 싶다. 즉, 괴델의 두 정리는 한편으로 직관 내지 상상력의 힘과 다른 한편으로는 이성이 자신의 관계를 인식할 수 있는 능력을 보여주는 것이라고 말이다.

(6) 마지막으로 형식주의의 위상은 어떻게 되었는가? 괴델의 정리의 결과로 Peano 체계와 같은 형식체계를 거부해야 하는가? 물론 그렇지 않다. 우리가 사용하고 있는 형식 체계는 모든 것을 다 포함하지는 않는다. 하더라도 사실상 수학자가 필요로 하는 거의 전부를 카버해 주기 때문이다. 강조하거니와 형식주의는 **엄밀성 · 보편성 · 확실성**을 추구하기 위해 의미를 배제하고 추론의 형태 즉 구문론에만 의존하는 연역추론이 완전무결하다는 합리주의적 발상이다. 그래서 오늘날의 수학자들도 모든 수학문제에는 필연적으로 어떤 답이 있다는 힐버트의 확신을 여전히 고수하고 마치 괴델정리가 자신들과는 아무 상관이 없는 것처럼 묵묵히 작업을 수행하고 있지 않는가?

이제까지 수학에서 증명가능한 것은 모두 참이지만, 역으로 참인 명제가 모두 증명가능하지는 않는다는 것을 살펴보았다. 참이면서 증명불가능한 명제의 존재는 우리로 하여금 자연스럽게 수학적 진리의 본성에 대해 자문하게 만든다. 수학에서 진리는 무엇이며 과연 무엇으로부터 오는가?

6. 수학적 진리 : 준경험주의의 대두

수학적 참은 어디에서 유래하는가?

전통적으로 여기에는 두 가지 답변이 있다. 먼저 자연을 수학 교과서로 본 갈릴레이를 보자. 그는 *Essayeur(시도하는 자)*에서 이제는 모두가 알고 있는 저 유명한 말을 하고 있다.

> 철학은 언제나 내 눈앞에 펼쳐진 거대한 책 (즉, 우주) 속에 쓰여 있다. 그러나 철학이 쓰여진 문자와 언어를 먼저 배우지 않으면 이 책을 이해할 수 없다. 이 책은 수학의 언어로 쓰여 졌고, 그 문자는 삼각형, 원, 그리고 그 밖의 기하학적 도형들인데 이들의 중개 없이는 이 책에서 단 한마디도 이해할 수 없을 것이다.

자연 자체가 수학적 성격이기 때문에 수학의 진리는 자연으로부터 유래하며 따라서 경험적 요소를 지니고 있다.

두 번째 답변으로 수학은 인간정신의 구조를 반영한다고 칸트(1724-1804)는 말한다.

*Prolegomena to Any Future Metaphisics*에서 그는 다음과 같이 썼다.

> 수학은 시간과 공간이라는 순수직관으로부터 유래한다. 기하학을 하기 위해서는 공 간에 대한 순수직관을 전개하면 되고, 대수학을 하기 위해서는 시간에 대한 순수직관을 전개하면 된다. 공간과 시간은 따라서 모든 수학의 토대가 된다. 그것은 현상들의 형태로서(즉, 인간 정신의 구조) 모든 수학적 지식의 근저에 있다.

여기에서 수학은 분석적 명제가 아니라, 종합적 명제라는 칸트의 저 유명한 이론이 나온다. 즉 수학은 직관에 의존하면서 개념의 구축에 의해 앞으로 나아간다는 것이다. 주지하다시피 칸트의 철학은 유클리드 기하학과 뉴튼 역학에 그 기반을 두고 있어서 절대시간과 절대공간의 개념에 의존하고 있다. 문제는 기하학이 꼭 유클리드

기하학 만이 아니며, 뉴튼 역학은 상대성 이론에 의해 대체되었다는 점이다. 아무튼 칸트의 순수직관 속에 창조적이고 독창적인 요소가 들어있는 것이 아닌가 우리는 추측해 본다. 바로 그것이 형식화에 저항하는 원인이 아닐까?

최근에 와서 수학에서 '준경험주의'[16]의 이론이 활기를 띠고 있다. Putnam도 그 중의 하나이다.

> "수학과 경험과학의 차이는 지나치게 과장되어 왔다. 수학에서도 가정들의 상호침투와 준경험적인 테스트가 있다. 수학이 경험과학이 아니라는 것은 모든 철학자가 첫 번째로 배우는 것이다. 그러나 새로운 수학의 패러다임으로서 선택공리의 채택은 하나의 **경험**이었다. 비록 실험실에서 흰까운을 입은 사람들에 의해 수행되지는 않았지만 말이다. 수학은 물론 물리학보다 훨씬 더 선험적이다. 그러나 그들의 유사성에 대한 관찰이 그들의 차이점을 철학적으로 명료하게 해준다."[17]

'정보 알고리듬이론'으로 알려진 우연의 탐구가 그레고리 카이튼(Gregory Chaitin)은 다음의 두 명제를 주장한다.

(1) 수학은 절대적 진리로 이끄는 것이 아니라 준 경험적이다.
(2) 수학은 수학자들이 생각하는 것보다 더 물리학에 가깝다.

얼핏 보면 카이튼의 주장은 갈릴레이의 연장선상에 있는 것처럼 보이지만 그는 자연에서 법칙성을 보는 것이 아니라 **우연**을 본다.

카이튼에 의하면 구조도 없고 모델도 없고, 오직 우연에 의해 산출된 그래서 어떤 설명도 없고 따라서 증명이 불가능한 수학적 진

---

16) Thomas Tymoczko, *New Direction in the philosophy of mathematics.*, Princeton University Press., 1998

17) Putnam, "Mathematics, Matters and Method", *Philosophical Papers,* P.xi.

리가 있다. 양자 역학에서도 신이 주사위 놀이를 하는지에 대해 아인슈타인과 코펜하겐 학파사이의 격돌은 잘 알려진 사실이다. 카이튼은 단호하게 "신은 주사위 놀이를 한다"고 주장한다. 소수의 분포나 원주율의 전개처럼 우연으로 보이는 사례가 없는 것은 아니나 대부분의 수학적 진리를 우연의 산물로 보기에는...? 아무튼 우연히 참인 따라서 증명 불가능한 정리를 취급하는 유일한 방식이 있는데 그것은 그 정리를 공리로 수용하는 것이다. 그러한 공리를 추가함으로써 우리는 말하자면 수학에 믿음의 요소를 도입하는 셈이다. 사정이 이러하다면 수학의 완전한 형식화가 벽에 부딪치는 것은 보다 자연스러워 보인다.

7. 결론에 대신하여

괴델정리에 의해 수학적 참의 개념은 수론의 테두리 내에서 정의될 수 없는 반면에, 증명가능성의 개념은 그것이 가능하다는 사실이 분명해졌다. 이제 수학에서 가장 중요한 기준은 참이 아니라 무모순성이라는 패러다임의 전이가 이루어진 것이다. 이러한 관점의 변화가 괴델의 첫 번째 정리의 가장 중요한 귀결이며, 그것은 또한 형식적 추론의 형식화가 지니는 내재적 한계를 보여주는 것이다. 무엇보다 이 정리는 어떤 수학 문제이든 유한회의 단계를 거쳐 증명되거나 반증될 수 있는 결정절차가 반드시 있어야 한다는 힐버트의 믿음에 종지부를 찍었다. 그러나 본문에서도 밝혔듯이 '절대적인' 결정불가능은 없다.

주어진 형식체계의 무모순성에 대한 진술자체가 그 체계에서 결정불가능한 진술이라는 두 번째 정리는 수론 나아가서 수학 전반에 걸쳐 무모순성을 증명하려고 그렇게도 열망했던 힐버트의 기대에 찬물을 끼얹었다. 그러나 여기에서도 역시 희망이 전무한 것은 아니며 Gentzen은 1938년 초한귀납법(transfinite induction)을 써서 수론의 무모순성을 증명하는데 성공하였다.

그래서 우리는 이렇게 말하고 싶다. 힐버트 프로그램은 설령 실

패라 하더라도 위대한 실패라고! 비록 수학적 추론의 완전한 형식화에는 실패했지만 그가 제안한 알고리듬(기계적 절차)의 개념은 나중에 프로그래밍 언어의 등장에 직접 기여하여 우리 시대의 가장 위대한 기술적 성공을 가져왔기 때문이다. 더구나 그의 프로그램은 Gödel, Turing, Church에 이어 오늘날 증명이론(proof theory)이라는 새로운 분야를 열어 수학에서 가장 활발하게 연구되고 있는 분야 중 하나가 되었다. 형식주의의 '파산'을 선고한 괴델정리 자체가 바로 형식주의의 방법론에 의해 성립되었다는 사실은 우리로 하여금 많은 생각을 하게 만든다.

끝으로, 수학적 참이 무엇이냐에 대해 모든 사람이 동의하는 진리개념을 우리는 아직 갖고 있지 못하다. 상이한 입장 나아가서 서로 모순되는 입장이 공존할 수도 있다. 수학적 진리 역시 다른 진리와 마찬가지로 절대적이 아니라 어떤 공리를 선택하느냐에 따라 상대적이다. 또한 결정적인 것도 아니어서 보다 포괄적이고 생산적인 이론에 의해 수정될 수도 있다. 결국 수학에서 진리는 하나만이 아니고 다원적이라는 결론에 도달하지 않을 수 없다.

- 별 첨 -

아래의 예는 Grenoble 2 대학 Alain Lecomte 교수의 학부 강의 "계산가능성과 결정가능성"에서 빌려온 것이다. 좀 길기는 하지만 앞에서 나온 '기계적 절차'의 개념을 파악하기 위해 꼭 필요하다고 판단되기 때문에 단계적으로 작동방식을 따라가 보기로 하자.

입력값이 '0'과 '1'로 단순화된 알파벳을 가지고 작업을 하기로 한다. 문제는 { 0, 1 }로 만들어진 단어를 복사하는 기계를 구상하는 것이다. 그 사이를 'X'로 떼어 놓자.

최초형태

			0	1	1	0	0	1	0	1	0											

↑
초기상태

최종형태

0	1	1	0	0	1	0	1	0	X	0	1	1	0	0	1	0	1	0	

↑
종료상태

이 기계의 작동방식은 다음과 같다.

(1) 공(空)이 아닌 입력어의 끝에 "X"를 표시하라.

(q_0, 0) ---> (q_0, 0 D)
(q_0, 1) ---> (q_0, 1, D)
(q_0, #) ---> (q_1, X, G)

(2) 처음으로 되돌아오라.

$(q_1, 0) \dashrightarrow (q_1, 0, G)$
$(q_1, 1) \dashrightarrow (q_1, 1, G)$
$(q_1, \#) \dashrightarrow (q_2, \#, D)$

(3) 지금의 기호를 기억하라.

$(q_2, 0) \dashrightarrow (q_3, A, D)$
$(q_2, 1) \dashrightarrow (q_4, B, D)$
$(q_2, X) \dashrightarrow (q_m, X, D)$

입력값이 0인 경우도 예견해야 하는데, 리본의 왼쪽부분이 모두 복사되었을 경우도 여기에 해당한다.

(4) X 너머로 기호를 이동시켜라.

- "0" 인 경우 :

$(q_3, 0) \dashrightarrow (q_3, 0, D)$
$(q_3, 1) \dashrightarrow (q_3, 1, D)$
$(q_3, X) \dashrightarrow (q_6, X, D)$

- "1" 인 경우 :

$(q_4, 0) \dashrightarrow (q_4, 0, D)$
$(q_4, 1) \dashrightarrow (q_4, 1, D)$
$(q_4, X) \dashrightarrow (q_7, X, D)$

(5) 다른 기호들 다음에 읽은 기호를 추가하라.

$(q_6, 0) \dashrightarrow (q_6, 0, D)$
$(q_6, 1) \dashrightarrow (q_6, 1, D)$
$(q_7, 0) \dashrightarrow (q_7, 0, D)$
$(q_7, 1) \dashrightarrow (q_7, 1, D)$
$(q_6, \#) \dashrightarrow (q_8, 0, G)$
$(q_7, \#) \dashrightarrow (q_8, 1, G)$

(6) 다시 뒤로 와라.

$$(q_8, 0) \dashrightarrow (q_8, 0, G)$$
$$(q_8, 1) \dashrightarrow (q_8, 1, G)$$
$$(q_8, X) \dashrightarrow (q_9, X, G)$$

(7) 'X'의 왼쪽에 있는 첫 번째 기호가 'A'나 'B'이면 모든 단어가 복사된 것이다. 이 자리에 '0'과 '1'을 복구하고 최종상태에 도달할 때까지 이동한다.

$$(q_9, A) \dashrightarrow (q_2, 0, D)$$
$$(q_9, B) \dashrightarrow (q_2, 1, D)$$

q_2 상태에서 기계는 'X' 위에 있다. 이로부터 q_m 상태로 이동한다.

(8) 그렇지 않으면 작업이 끝나지 않았다. 다음의 기호를 찾으러 가야한다.

$$(q_9, 0) \dashrightarrow (q_{10}, 0, G)$$
$$(q_9, 1) \dashrightarrow (q_{10}, 1, G)$$
$$(q_{10}, 0) \dashrightarrow (q_{10}, 0, G)$$
$$(q_{10}, 1) \dashrightarrow (q_{10}, 1, G)$$
$$(q_{10}, A) \dashrightarrow (q_2, 0, D)$$
$$(q_{10}, B) \dashrightarrow (q_2, 1, D)$$

(9) q_m 상태에서 기계가 한 일을 쓰는 일만 남았다.

$$(q_m, 0) \dashrightarrow (q_m, 0, D)$$
$$(q_m, 1) \dashrightarrow (q_m, 1, D)$$
$$(q_m, \#) \dashrightarrow (q_{m+1}, \#, G)$$
$$(q_{m+1}, 0) \dashrightarrow (q_{STOP}, 0, D)$$
$$(q_{m+1}, 1) \dashrightarrow (q_{STOP}, 1, D)$$

마지막 두 개의 전이함수는 헤드가 결과의 오른쪽 첫 번째 칸에 멈추도록 하기 위해 필요한 것이다.

참고 문헌

Benacerraf P. & Putnam H. , *Philosophy of mathematics,* 「수학의 철학」(박세희 역), 아카넷, 2002.

Cassou-Noguès, P., *Hilbert,* Les Belles Lettres, Paris, 2001.

-,*Gödel,* Les Belles Lettres, Paris, 2004.

Dawson,J.W.Jr., *Logical Dilemmas.* The Life and Work of Kurt Gödel.,A.K. Peters Ltd.Wellesley,MA.,1997.

Delessert, A., *Gödel, une révolution en mathématiques,* P.P.U.R., Lausanne, 2000.

Gödel K., "La logique mathématique de Russell.", *La formalisation,* Cahiers pour l'analyse 10, pp.84-107, 1969.

Gray, J. J., *Le défi de Hilbert,* préface de P.Cartier, Dunod, Paris, 2003.

Heijenoort, J. van(ed.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic,* Havard Univ. Press, Cambridge(Mass.), 1967.

Hilbert, D., *Sur les problèmes futurs des mathématiques,*tr.fr. L.Laugel, Ed. J. Gabay, Sceaux, 1990.

- "Sur l'infini",tr.fr. dans Largeault, *Logique mathématique, textes,* A. Colin, Paris, 1972, pp.220-45.

Largeault, J.(éd.), *Intuitionisme et théorie de la démonstration,* Vrin, Paris, 1992.

Lassègue, J., *Turing,* Les Belles Lettres, Paris, 1999.

Nef, F. et Vernant, D., *Le formalisme en question. Le tournant des années 30,* Vrin, Paris, 1998.

Rivenc,F. et Rouilhan, Ph. de,(éds.), *Logique et fondement des mathématiques,* Payot, Paris, 1992.

Turing A., *"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem",* 1937, (인터넷 자료)