# 조건부 확률과 조건문의 확률[1]

## (Conditional Probabilities and Probabilities of Conditionals)

최원배(고려대학교)

【요약문】 조건문의 확률은 조건부 확률과 같을 수 없음을 보이는 루이스의 '사소함 결과'(the triviality results)는 널리 알려져 있다. 하지만 이 증명의 정확한 구조와 그 의미를 파악하기란 그다지 쉽지 않다. 이 논문에서는 먼저 루이스 증명의 한 형태가 제시되고, 왜 조건문의 확률은 조건부 확률과 같을 수 없는지에 대해 한 가지 설명이 제공된다. 이와 아울러 이런 결과가 갖는 철학적 함축이 무엇인지가 논의된다. A일 경우 C일 조건부 확률은 A가 성립할 경우 C가 성립할 가능성이 어느 정도인지에 관한 것으로, 이 점은 조건부 확률의 정의인 등식 Pr(C | A) = Pr(A & C) / Pr(A)에 잘 반영되어 있다. 조건부 확률이 갖는 이런 독특한 성질과 조건부 확률과 언제나 같은 확률을 갖는 명제를 찾으려는 노력이 허사로 끝나게 마련이라는 점은 서로 밀접한 연관이 있어 보인다. 만약 이 점이 옳다면, 우리는 조건문은 그냥 주장과는 아주 다른 조건부 주장을 표현한다고 보아야 하며, 조건부 주장은 진리조건을 갖지 않는, 사이비 주장이라는 점을 받아들여야 할지도 모르겠다.

【Abstract】 Adams' Thesis, or the so-called equation Pr(A → C) = Pr(C | A) seems to express a correct relationship between the probabilities of conditionals and conditional probabilities. But D. K. Lewis has proved the remarkable fact that probabilities of conditionals are not conditional probabilities. In this paper I present a version of Lewis' triviality results and give an explanation why probabilities of conditionals are not conditional probabilities. A conditional probability of C given A has a peculiar property in that its probability is insulated from not-A facts: the only thing relevant is the proportion of ways in which A is true which are also ways for C to be true. This peculiarity of conditional probability seems to put the great obstacle in the way of attempting to find a proposition such that its probability of being true systematically coincides with conditional probability of something else.

【주제어】 확률, 조건부 확률, 루이스, 조건문
【Keywords】 probability, conditional probability, Lewis, conditionals

---

1) 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2002-074-AS1514).

## 1. 머리말

"만약 A라면, C"(If A, then C)라는 형태의 조건문(conditionals)은 우리 일상생활에서 빈번하게 사용된다. 이런 조건문을 사용하여 우리는 조건부 주장("만약 민혁이의 말이 옳다면, 영선이가 범인이다")을 하기도 하고, 조건부 합의("만약 당신이 내일까지 내 통장에 입금을 한다면, 그 물건을 되돌려주겠다")에 도달하기도 하며, 조건부 예측("만약 삼성 라이온즈가 왼손잡이 투수를 내세운다면, 두산 베어즈는 좌타자를 대거 기용할 것이다")을 하기도 한다. 나아가 우리는 때로 조건부 명령("만약 철수가 찾아오면, 이 물건을 전해 주어라")을 내리며, 조건부 질문("만약 그쪽에서 전화가 오면, 뭐라고 얘기할까요?")을 제기하기도 한다.

조건부 사고(conditional thoughts)는 인간 사고의 기본 형태 가운데 하나이다. 우리는 상황이 단순히 어떤지에 관심을 지니고 있을 뿐만 아니라, 일정한 조건하에서 어떤 상황이 벌어질지에도 커다란 관심을 지니고 있다. 우리가 나날이 하는 의사결정이나 결단은 의식적인 심사숙고의 과정을 거치기도 하는데, 이때 큰 몫을 담당하는 것이 바로 조건부 사고이다. 가령 시속 90km로 운전을 하고 있는 중에 앞에 급커브 길이 있음을 일러주는 도로 표지판을 우리가 본다고 하자. 이 경우 "만약 내가 지금 속도를 줄이지 않는다면, 교통사고가 날지도 모른다"라는 조건부 사고를 하지 못한다면, 이 정보는 우리에게 아무런 의미도 없을 것이다. 이런 점에서 어떤 위기나 재난이 일어나리라는 점을 미리 알고 대처한다는 사실은 우리 인간이 조건부 사고를 하고 있음을 잘 보여준다.

인간 사고에서 조건부 사고가 지닌 비중을 반영하듯, 조건문은 추리에서도 아주 중요한 역할을 담당하고 있다. 그래서 우리는 일상적으로 자주 사용되는 타당한 추리방식 가운데 조건문을 구성요소로 포함하는 것들이 무척 많음을 볼 수 있다. 전건 긍정규칙(modus ponens), 후건 부정규칙(modus tollens), 가언 삼단논법(hypothetical syllogism), 대우규칙(contraposition) 등은 모두 조건

문이 나오는 추리방식 가운데 우리가 특히 자주 사용하는 예들이다. 또한 과학의 일반법칙이나 인과법칙은 모두 조건문 형태로 정식화된다고 생각되며, 일반법칙과 우연적 일반화의 구분이나 성향어(dispositional terms)에 대한 분석에도 조건문이 활용되고 있다. 이처럼 조건문은 다방면에서 중요한 역할을 하고 있음에도 불구하고, 막상 조건문에 대한 바람직한 이론이 무엇인지를 둘러싸고는 의견이 분분하다. 이 글에서 나는 조건문을 조건부 확률(conditional probability)과 연관지어 이해하고자 하는 시도에 대한 루이스(D. K. Lewis)의 비판을 살펴보고자 한다.

"만약 A이면 C"라는 조건문의 확률은 A라는 조건하에서 C일 조건부 확률과 같다는 생각은 아주 그럴듯해 보인다. 사실 우리는 이 둘이 서로 구분이 되지 않을 정도로 똑 같다는 느낌을 지울 수 없다. 정상적인 주사위를 던져 짝수가 나온다는 조건하에서 그것이 6일 확률은 "만약 이 주사위를 던져 짝수가 나온다면, 그것은 6일 것이다"라는 조건문이 지닌 확률이 아니고 무엇이겠는가? 그런데 루이스는 조건문의 확률은 조건부 확률과 같을 수 없음을 증명해 보였다. 루이스의 이 증명은 이후 '폭탄'(bombshell)[2]으로 묘사될 정도로 커다란 파장을 일으켰다. 이 글의 목적은 루이스 증명이라는 이 폭탄의 제조법과 위력을 살펴봄으로써 조건부 확률의 의미와 조건문의 본성에 대해 좀 더 나은 이해를 얻는 것이다. 논의 순서는 다음과 같다. 우선 조건부 확률 개념과 아울러 조건문의 확률이 바로 조건부 확률이라는 논제의 의미와 중요성을 간단히 설명한다(2절과 3절). 그런 다음 루이스 증명의 구조를 자세히 살펴보고(4절), 왜 조건문의 확률은 조건부 확률과 같지 않은지를 밝혀보고자 한다(5절). 끝으로 이를 바탕으로 이 논의가 지닌 철학적 함축을 음미해 보고자 한다(6절).

---

2) Van Fraassen (1976), p. 273, Stalnaker (1976), p. 302.

## 2. 조건부 확률과 절대적 확률

우리는 "나는 오는 일요일에 경주로 여행을 갈 것이다"는 말을 하는 경우도 있고, "만약 내가 이번 주말까지 이 일을 끝낸다면, 나는 오는 일요일에 경주로 여행을 갈 것이다"는 말을 하는 경우도 있다. 전자의 경우 나는 오는 일요일에 경주로 여행을 갈 것이라는 단정적 주장을 하는 것이며, 내가 만약 일요일에 여행을 가지 않는다면, 나는 거짓말을 했다고 비난받게 될 것이다. 하지만 후자의 경우, 나는 "오는 일요일에 여행을 갈 것이다"를 단언한 것이 아니다. 이 경우 내가 가령 일을 끝내지 못해 여행을 가지 않았다고 하더라도 바로 이 이유 때문에 내가 거짓말을 한 것이라고 비난받지는 않는다. 이것이 이른바 조건부 주장과 단언적 주장의 차이이다.

이런 두 부류의 주장과 관련해 우리는 가령 오는 일요일에 여행을 갈 확률(또는 오는 일요일에 여행을 갈 것이라는 주장이 참일 확률)이라는 '절대적'(absolute 또는 '정언적'(categorical)) 확률을 얘기할 수 있고, 또한 이번 주에 일을 끝낸다는 조건하에서 오는 일요일에 여행을 갈 확률이라는 '조건부' 확률을 얘기할 수도 있다. A라는 조건하에서 C일(또는 A일 경우 C일) 조건부 확률은 보통 다음과 같이 정언적 확률을 이용해 계산된다고 여겨진다.

(1) $Pr(C \mid A) = Pr(C \& A) / Pr(A)$ (단 $Pr(A) > 0$)

확률 체계에 따라 조건부 확률을 원초적 개념으로 잡고, 이를 바탕으로 곱 사건(연언)의 확률을 정의하기도 하고, 아니면 곱 사건(연언)의 확률을 원초적 개념으로 잡고 이를 바탕으로 조건부 확률을 정의하기도 한다. 가령 확률 이론을 처음으로 공리 체계화 했던 콜모고로프는 (1)이 조건부 확률의 정의라고 말한다.[3] 하지만 이것이 단순한 규약을 넘어 조건부 확률에 대한 참된 정의인지를 두고

---

3) Kolmogorov (1933), p. 6.

논란이 있다.[4] 만약 이것이 정의라면 조건부 확률을 알기 위해서는 언제나 우변에 나오는 절대적 확률 Pr(A)와 Pr(A & C)를 알아야 할 것이다. 하지만 반드시 그렇지는 않다는 점이 지적되었다.[5] 가령 우리는 지금 모스크바에 비가 오고 있는지 여부에 대해 전혀 모르더라도, 지금 모스크바에 비가 오고 있다는 조건하에서 모스크바 거리가 젖어 있을 확률은 상당히 높다고 확신할 수 있다. 이는 우리가 Pr(A)를 전혀 모르더라도 Pr(C | A)를 알 수 있다는 의미이다. 따라서 Pr(A)와 Pr(A & C)가 주어지면 조건부 확률이 주어지는 것은 사실이지만, 이들이 꼭 주어져야만 조건부 확률이 주어지는 것은 사실이 아니라고 할 수 있다.

## 3. "조건문의 확률은 조건부 확률이다."

'A → C'가 "만약 A이면 C"라는 일상적 조건문을 나타낸다고 하자. 이 경우 다음 등식 (2)는 조건부 확률과 조건문의 확률 사이의 관계를 명쾌하게 표현해 준다고 생각된다.

(2) $Pr(A \rightarrow C) = Pr(C \mid A)$

즉 'A일 경우 C'일 '조건부' 확률은 곧 '만약 A라면 C'라는 '조건문'의 확률과 같다는 것이다. 예를 들어 정상적인 주사위를 던져 짝수가 나온다고 할 경우 그것이 2일 확률은 "만약 주사위를 던져 그것이 짝수라면, 그것은 2일 것이다"의 확률과 같다고 생각된다. 이 논제를 스톨네이커 가설(Stalnaker's Hypothesis) 또는 아담스의 논제(Adams Thesis)[6]라고 부른다.

---

4) 이와 관련된 최근 논문으로는 Hajek (2003) 참조. 그는 조건부 확률 개념이 원초적 개념으로 여겨져야 하며, 조건부 확률을 (1)과 같은 형태로 분석하는 것은 적절한 분석도 아니라고 주장한다.

5) Edgington (1995), pp. 266-7, (1997), pp. 109-11.

6) 이들 용어가 부적절한 뉘앙스를 갖는다는 이유로 그냥 이를 '등식'이라

스톨네이커는 실제로 조건문의 확률이 조건부 확률임을 전제하고 자신의 C2 체계를 구성하고 있다.[7] 아담스는 특히 일련의 저작을 통해[8] 진리 보존적 추리로 규정되는 연역적 타당성의 기준을 확률 보존적인 추리로 재정식화 하고자 하였고, 이것이 이른바 '확률 논리'(probability logic)의 출발점이 되었다. 여기에도 조건문의 확률은 조건부 확률이라는 논제가 당연하게 받아들여지고 있음은 더 말할 나위가 없다. 아담스가 확률 논리를 구성하게 된 데는 일상적 조건문을 진리 함수적 조건문, 즉 질료적 조건문(material conditional)으로 이해할 때 문제가 생긴다는 점과 연관이 있다. 널리 알려져 있듯이, 일상적 조건문을 진리 함수적 조건문으로 이해할 경우, 타당한 추리이지만 직관적으로는 받아들이기 어려운 것들이 있다. 아담스에 따를 때, 표준적인 타당성 기준인 다음 원리,

> 어떤 추리가 타당하다.
>
> = 전제들이 모두 참이면서 결론이 거짓일 수는 없다.

에서 '참'과 '거짓' 개념을 각각 '개연적'(probable), '비개연적'(improbable)으로 바꾸어 넣게 되면, 다음과 같은 이른바 확률론적인 타당성 기준을 얻게 된다.

> 어떤 추리가 타당하다.
>
> = 전제들이 모두 개연적이면서 결론이 비개연적일 수는 없다.

이런 새로운 기준에 따라 구성된 논리 체계에서는 조건언이

---

부르는 사람이 많다.

7) 가령 Stalnaker (1970), (1976) 참조.

8) Adams (1965), (1966), (1975) 참조.

등장하지 않는 추리의 경우 연역적으로 타당한 추리는 모두 이 기준에 의해서도 타당한 추리가 되며, 조건언이 나오는 추리들[9] 가운데 문제가 되었던 추리들은 실제로 부당한 추리로 판정되어 우리가 원하는 결과를 얻게 된다.

## 4. 루이스의 증명

그런데 루이스에 따르면, 위의 등식 (2)는 성립하지 않는다. 이것이 이른바 루이스가 입증한 '사소함 결과'(the Triviality Results)이다. 우선 이 증명을 자세히 살펴보기로 하자.[10] 먼저 다음과 같은 확률론의 기본 원리들을 받아들인다고 하자.

(i) $1 \geqq Pr(A) \geqq 0$
(ii) A와 B가 동치라면, $Pr(A) = Pr(B)$.
(iii) A와 B가 양립불가능하다면, $Pr(A \vee B) = Pr(A) + Pr(B)$.
(iv) A가 필연적이라면, $Pr(A) = 1$.

그리고 조건부 확률에 관한 기본적 정의로 (1)을 받아들이고 귀류법 논증을 위해 (2)를 참이라고 가정하자.

(1) $Pr(C \mid A) = Pr(C \& A) / Pr(A)$ (단 $Pr(A) > 0$)
(2) $Pr(A \rightarrow C) = Pr(C \mid A)$

일종의 보조 정리로 루이스는 다음을 먼저 증명하는데,[11]

9) 물론 아담스 체계에서는 조건문 안에 다시 조건문이 나오는 형태의 식은 제대로 형성된 식(wff)이 아니다.
10) 이 증명은 루이스가 제시한 증명과 똑 같지는 않다. 이 증명을 재구성하는 데에는 Lewis (1976) 외에 Appiah (1985), Bennett (2003), Blackburn (1986) 등을 참조했다.
11) 이를 얻는 다른 방식의 증명으로는 아래 5절 참조.

이에는 우리의 확률 함수가 조건화 규칙(conditionalization)에 대해 닫혀 있다는 점이 가정된다. 그래서 Pr(B)가 0보다 클 경우, Pr′(A)가 항상 Pr(A | B)와 같은 확률 함수 Pr′이 존재하며, 이때 우리는 조건화 규칙에 의해 Pr로부터 Pr′을 얻는다고 말한다.

(3) $Pr(A \rightarrow C \mid B) = Pr(C \mid A \ \& \ B)$, 단 $Pr(A \ \& \ B) > 0$

증명

$$
\begin{aligned}
Pr(A \rightarrow C \mid B) & \\
&= Pr'(A \rightarrow C) \\
&= Pr'(C \mid A) \\
&= Pr'(C \ \& \ A) \,/\, Pr'(A) \\
&= Pr(C \ \& \ A \mid B) \,/\, Pr(A \mid B) \\
&= \{Pr(C \ \& \ A \ \& \ B) \,/\, Pr(B)\} \,/\, \{Pr(A \ \& \ B) \,/\, Pr(B)\} \\
&= Pr(C \ \& \ A \ \& \ B) \,/\, Pr(A \ \& \ B) \\
&= Pr(C \mid A \ \& \ B)
\end{aligned}
$$

(3)에서 B 대신 C와 ¬C를 각각 차례로 대입하면, 우리는 다음을 얻게 된다.

(4) $Pr(A \rightarrow C \mid C) = Pr(C \mid A \ \& \ C) = 1$

(5) $Pr(A \rightarrow C \mid \neg C) = Pr(C \mid A \ \& \ \neg C) = 0$

이제 우리는 주된 증명으로 넘어갈 수 있다. 우선 $Pr(A) > 0$, $Pr(A \ \& \ C) > 0$, $Pr(A \ \& \ \neg C) > 0$이라고 가정하자.

$Pr(A \rightarrow C)$

$= Pr((A \rightarrow C) \ \& \ C \vee (A \rightarrow C) \ \& \ \neg C) \qquad \because$ (ii)

$= Pr((A \rightarrow C) \,\&\, C) + Pr((A \rightarrow C) \,\&\, \neg C) \quad \because$ (iii)
$= Pr((A \rightarrow C) \mid C) \times Pr(C) + Pr((A \rightarrow C) \mid \neg C) \times Pr(\neg C) \quad \because(1)$
$= Pr(C \mid A \,\&\, C) \times Pr(C) + Pr(C \mid A \,\&\, \neg C) \times Pr(\neg C) \quad \because(3)$
$= (1 \times Pr(C)) + (0 \times Pr(\neg C)) \quad \because(4)$, (5)를 각각 대입
$= Pr(C)$

$Pr(A \rightarrow C) = Pr(C \mid A)$이므로 결국

(6) $Pr(A \rightarrow C) = Pr(C \mid A) = Pr(C)$

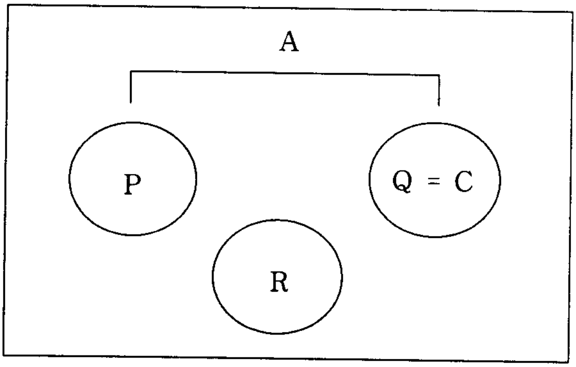
즉 A와 C는 선험적으로 서로 독립적이다라는 결과를 얻는다. 증명 끝

위의 결과는 물론 그 자체로도 불합리해 보인다. 하지만 루이스의 말대로 이것이 적나라한 모순은 아니다. 루이스는 만약 이것이 성립하는 확률 체계라면, 그런 체계의 형식 언어는 표현력이 심각하게 제약을 받게 된다는 점을 보인다. 이것이 유명한 이른바 첫 번째 사소함 결과(the first triviality result)이다.[12)]

(가) 첫 번째 사소함 결과: 위의 논증의 가정들이 옳다면, 이런 언어에서는 3개의 서로 배타적인 명제란 있을 수 없다.

귀류법을 적용하기 위해 양의 확률을 가지는 3개의 서로 배타적인 명제, P, Q, R이 있다고 가정하자. 그리고 이들을 다음과 같이 벤 다이어그램으로 나타낸다고 하자.

12) 아래 벤 다이어그램을 이용한 증명은 Adams (1998), pp. 261-2를 참조하였다.




[그림 1 ]

그리고 A = P ∨ Q로, C = Q로 잡는다고 하자. 그러면 A & C와 A & ¬C는 모두 양의 확률을 지닌다. 왜냐하면 A & C는 Q와 동치이고, A & ¬C는 P와 동치인데, 이들은 앞에서 양의 확률을 갖는다고 가정되었기 때문이다. 따라서 우리는 앞의 주된 증명에서처럼 기본적인 요건, 즉 Pr(A), Pr(A & C), Pr(A & ¬C)가 모두 0보다 크다는 조건을 확보한 셈이다. 그런데 앞의 증명 결과와 모순되게 이 조건에서 Pr(C)는 Pr(A → C)와 같지 않고 그보다 적음을 보일 수 있다.

(i) $Pr(C) = Pr(Q)$

(ii) $Pr(A \rightarrow C) = Pr(A \& C) / Pr(A)$

$\qquad\qquad\qquad = Pr(Q) / Pr(P \vee Q)$

(iii) $Pr(P \vee Q) \leq 1 - Pr(R)$

(iv) $Pr(R) > 0$

(v) $Pr(P \vee Q) < 1$

(vi) $Pr(Q) < Pr(Q) / Pr(P \vee Q)$

(vii) $Pr(C) < Pr(A \rightarrow C)$

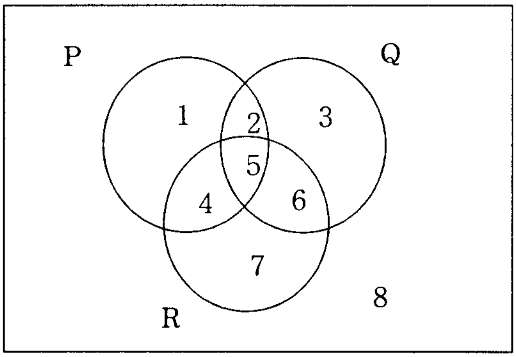
이는 Pr(C) = Pr(A → C)라는 앞의 증명 결과와 모순이다. 따라서 3개의 서로 배타적인 명제가 있다는 가정이 거짓이다. 결국 3개의 서로 배타적인 명제란 있을 수 없다. 증명 끝

루이스는 3개의 서로 배타적인 명제가 있을 수 없는 이런 언어를 표현력이 극히 제한된 '사소한 언어'(trivial language)라고 부른다.[13] 즉 조건문의 확률이 조건부 확률과 언제나 같게 되는 확률 체계가 있을 수 있지만 그런 체계의 표현력이란 3개의 상호 배타적 명제를 표현할 수조차 없을 정도로 지극히 사소하다는 것이고, 바로 이런 이유 때문에 이 증명을 사소함 결과라고 부ᄅ 것이다.
루이스는 이렇게 입증된 첫 번째 사소함 결과를 바탕으로 이어 이런 체계의 확률 함수는 많아야 4개의 서로 다른 확률값만을 가질 수 있다고 하는 두 번째 사소함 결과(the second triviality result)를 입증한다.

(나) 두 번째 사소함 결과: 위의 논증의 가정들이 옳다면, 이런 확률 함수는 많아야 4개의 서로 다른 확률값만을 가질 수 있다.

증명
5개의 서로 다른 확률값을 갖는 확률 함수가 있다고 가정해 보자. 이를 통해 모순을 도출한다. 만약 그 확률 함수가 5개의 서로 다른 확률값을 갖는다면, 이 가운데 적어도 셋, 가령 Pr(P), Pr(Q), Pr(R)은 0과 1 사이의 값을 가질 수밖에 없다(나머지 둘은 각각 0과 1일 수 있다). 이 경우 우리는 P, Q, R과 이들의 확률을 다음 벤 다이어그램처럼 나타낼 수 있다.

13) Lewis (1976), p. 80.




[그림 2 ]

그런데 만약 Pr(P), Pr(Q), Pr(R)이 모두 다른 값이려면, 벤다이어그램에 나오는 전체 8개의 영역 가운데 적어도 3개 영역은 양의 확률을 가져야 한다. 왜냐하면 만약 두 개 영역만 양의 확률을 갖는다면, 그 경우 이 둘은 서로 배타적이므로 이것들의 합은 1이어서 0과 1 사이에 서로 다른 확률값은 2개에 그치게 되고, 결국 Pr(P), Pr(Q), Pr(R)은 서로 다른 확률값이 아니게 되기 때문이다. 따라서 적어도 세 개 영역은 양의 확률을 가져야 한다. 그런데 이들 각 영역은 상호 배타적이고, 따라서 이에 상응하는 명제는 상호 배타적일 수밖에 없다. 그러므로 우리는 적어도 세 개의 서로 배타적인 명제를 갖게 된다. 그런데 이는 앞의 증명 결과와 모순된다. 따라서 5개의 서로 다른 값을 가질 수 있다는 애초의 가정이 잘못이며, 결국 이런 확률 함수는 많아야 4개의 값만을 가질 수 있다. 증명 끝

## 5. 문제의 원인?

앞서 언급했듯이, 루이스의 증명이 처음 제시되었을 때 이것은

‘폭탄’으로 받아들여질 만큼 충격적이었다. 따라서 많은 학자들이 이 증명을 면밀히 재검토하게 되었고, 루이스 증명에서의 가정들에 관해 이의가 제기되게 된 점은 당연한 것이었다.

루이스의 주된 증명에는 일종의 보조 정리인 (3)이 이용되는데, 앞에서 보았듯이 이를 도출하는 데는 조건화(conditionalization) 규칙이 사용되고 있다. 즉 $Pr(B) > 0$일 경우, $Pr'(A) = Pr(A \mid B)$인 확률 함수 $Pr'$이 언제나 존재한다는 점을 가정하고 있다. 이 조건화 규칙을 이용하여 우리는 (3) $Pr(A \rightarrow C \mid B) = Pr(C \mid A \& B)$를 얻게 되는데, 이 식은 B라는 조건하에서 조건문 $A \rightarrow C$의 확률은 B와 전건 A라는 조건하에서 후건 C의 확률과 같음을 말한다. 이를 (2)와 결합하게 되면, 결국 $Pr(B \rightarrow (A \rightarrow C)) = Pr((B \& A) \rightarrow C)$이 성립하고, 이는 결국 조건문 안에 다시 조건문이 나타나는 복합 조건문을 변형할 수 있게 해 준다. 이 조건화 규칙의 사용과 관련하여 몇 가지 이의가 제기되었다. 우선 반 프라센은 여기에 루이스의 ‘형이상학적 실재론’(metaphysical realism)이 깔려 있다고 비판하였다.[14] 스톨네이커는 반 프라센의 이런 비판에 궁극적으로 동의하지는 않는다. 하지만 스톨네이커는 반 프라센의 비판이 정확히 어느 단계를 문제삼는지를 명확히 해주고 있으므로 이를 잠깐 살펴볼 필요가 있다. 스톨네이커는 (3)이 구체적으로 다음과 같이 증명된다고 이해한다.[15]

$$\begin{aligned} Pr'(A \& C) &= Pr'(A) \times Pr'(C \mid A) \\ &= Pr'(A) \times Pr'(A \rightarrow C) \\ &= Pr(A \mid B) \times Pr(A \rightarrow C \mid B) \\ Pr'(A \& C) &= Pr(A \& C \mid B) \\ &= Pr(A \mid B) \times Pr(C \mid A \& B) \end{aligned}$$

이 둘로부터 $Pr(A \mid B)$를 소거하여 결국

(3) $Pr(A \rightarrow C \mid B) = Pr\ (C \mid A \& B)$

14) van Fraassen (1976) 참조.

15) Stalnaker (1976), p. 303 참조. 또한 Sainsbury (2001), p. 145 참조.

스톨네이커에 따를 때, 반 프라센은 이 증명에서 구체적으로 정확히 Pr′(A → C)로부터 Pr(A → C | B)로 나아가는 단계가 문제가 있음을 지적하고 있다.[16] 블랙번 또한 (3)이 보편적으로 성립하지 않음을 주장하고,[17] 나름의 예를 들고 있다.[18] 그리고 Appiah도 이에 관련해 이의를 제기하고 있다.[19] 하지만 여기서 이들의 논거를 자세히 살펴볼 필요는 없다. 왜냐하면 조건화 규칙을 사용하지 않고도 루이스의 결과를 얻을 수 있기 때문이다.[20] 사실 루이스의 증명이 처음 제시된 이후 좀 더 약한 가정만으로 같은 결과를 얻을 수 있음을 보이는 여러 가지 증명이 제시되었고, 최근에도 여전히 그런 증명이 개발되고 있다.[21] 따라서 현재 루이스의 증명은 확고하게 자리 잡았다고 할 수 있다.

그러면 왜 조건문의 확률은 조건부 확률일 수 없을까? 나는 루이스 증명의 여러 형태 가운데 이 점을 가장 잘 보여줄 수 있는 증명은 다음 증명이라고 생각한다.[22]

우선 조건문의 확률이 조건부 확률과 같은 그런 명제 X가 있다고 해보자. 그리고 Pr(A), Pr(C & A), Pr(C & ㄱ A)는 모두 0보다 크다고 하자. 증명의 기본 방식은 조건부 확률은 같지만 조건문의

---

16) Stalnaker (1976), p. 303.
17) Blackburn (1986).
18) 흥미롭게도 블랙번의 이런 주장이 옳다면, 이는 반 멕기가 제시한 전건긍정규칙의 반례 문제를 해결하는 데에도 한 가지 시사점을 제공해 준다고 생각된다.
19) Appiah (1985).
20) 이를 보려면 Stalnaker (1976)과 Lewis (1986)을 참조.
21) 이런 대표적인 증명은 Carlstrom and Hill (1978)이다. 최근의 예 하나로는 Milne (1997) 참조.
22) 이 증명의 원초적 아이디어는 Carlstrom & Hill (1978)에 나온다. 증명 방식은 Edgington (1995), (1997)에 의존하며, 이를 도형으로 이를 나타내는 아이디어는 Hajek (1994)에서 영향을 받았다. 하지만 이런 형태로 이 증명을 제시한 것은 여기서 처음이다.

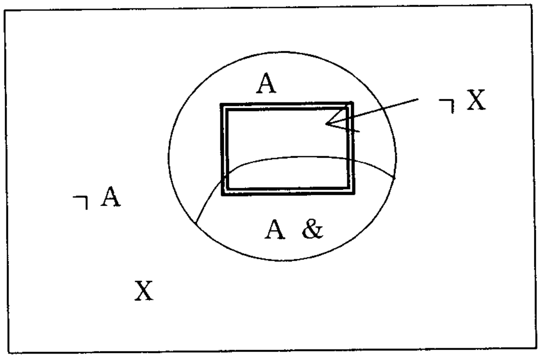
확률은 다른 확률 함수가 언제나 존재한다는 점을 보이는 것이다. 이를 위해 먼저 주목해 두어야 할 점은 조건부 확률 Pr(C | A)는 Pr(A)와 Pr(A & C)의 값에 의해 완전히 고정된다는 점이다.

Pr(X) = Pr(A → C) = Pr(C | A) = Pr(C & A) / Pr(A) 가정

우리가 찾는 조건 명제 X는 다음 세 가지 조건을 만족시켜야 한다.

(i) ㄱA가 X를 함축해서는 안 된다.

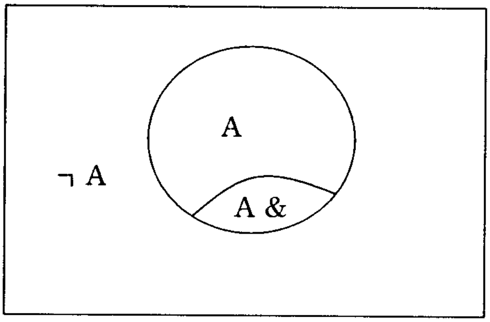
ㄱA가 X를 함축한다고 가정해 보자. 이 경우 X는 우리가 찾는 X일 수 없다. 이를 확실히 하기 위해 다음과 같은 벤 다이어그램을 이용해 보기로 하자.




[그림 3]

그림에서 A가 참이 되는 영역을 원으로 나타내고, 원 바깥의 영역은 ㄱA가 참이 되는 영역이라 하자. 그리고 원 안에는 다시 일부가 A이면서 C인 영역이라고 하자. 만약 ㄱA가 X를 함축한다면, X가 참이 되는 영역은 ㄱA가 참이 되는 영역 전체를 포함하게 될 것이다. 이를 나타내기 위해 위의 그림에서 원 안에 있는 네모 바깥의 영역이 바로 X가 참이 되는 영역이고, 네모 안의 영역은 ㄱX

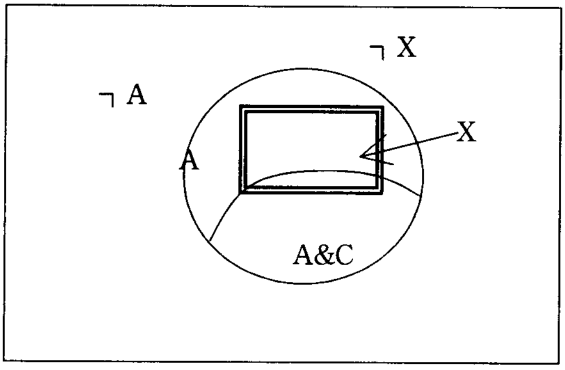
가 참이 되는 영역이라고 하자. 그러면 그림에서 분명히 드러나듯, Pr(¬ A)는 높지만 Pr(X)는 낮을 수 없다. 즉 Pr(X) > Pr(¬ A). 그러나 Pr(¬ A)는 높지만 Pr(C | A)는 낮을 수 있다. 가령 다음 벤 다이어그램은 그런 상황이다.




[그림 4]

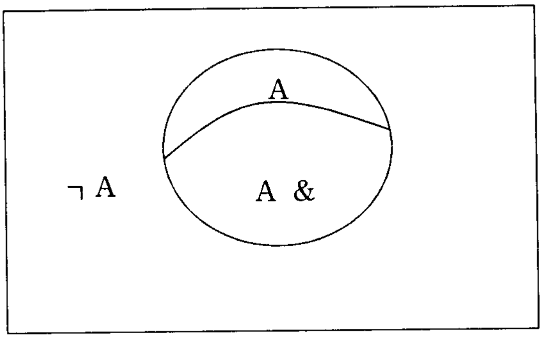
그러므로 Pr(X)와 Pr(C | A)는 모든 확률 함수에서 같지는 않을 것이다. 따라서 ¬ A는 X를 함축할 수 없다.

(ii) X는 A를 함축할 수 없다.
X가 A를 함축한다고 하자.




[그림 5]

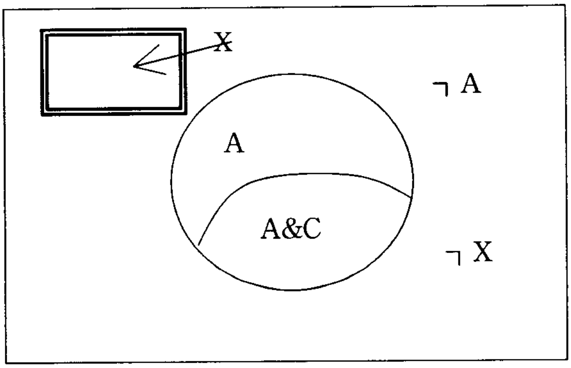
이 경우 Pr(X)는 높지만 Pr(A)는 낮을 수 없다. 이번 그림의 경우 네모 안의 영역이 X의 영역이고 네모 바깥의 영역이 ㄱX의 영역임을 주목하라. 하지만 이때 Pr(C | A)는 높지만 Pr(A)는 낮은 경우가 있을 수 있다. 가령 아래 그림은 그런 경우를 나타낸다.




[그림 6]

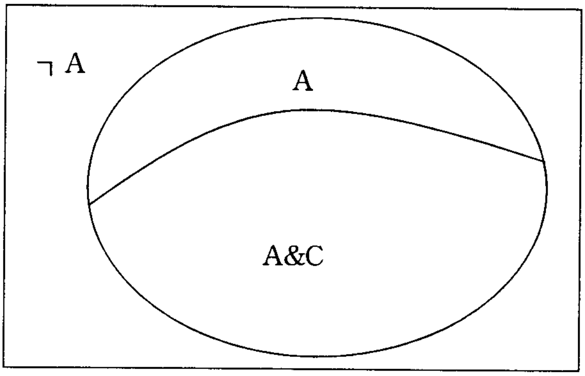
따라서 Pr(X)는 Pr(C | A)와 모든 확률 함수에서 같지는 않을 것이다. 결국 X는 A를 함축할 수 없다.

(iii) X는 ㄱA를 함축할 수 없다.
X가 ㄱA를 함축한다고 하자.




[그림 7]

이 경우 Pr(X)는 높지만 Pr(ㄱ A)는 낮을 수 없다. 그러나 Pr(C | A)는 높지만 Pr(ㄱ A)는 낮은 경우가 있을 수 있다. 가령 아래 그림은 그런 경우를 나타낸다.




[그림 8]

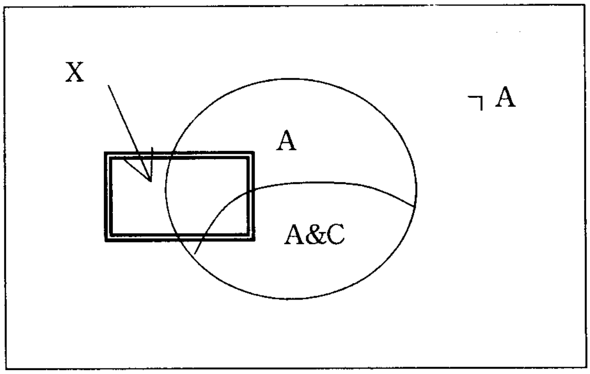
따라서 Pr(X)는 Pr(C | A)와 모든 확률 함수에서 같지는 않을 것이다. 결국 X는 ㄱ A를 함축할 수 없다.[23] 이상의 논의에 따라 우리는 최종적으로 다음을 얻게 된다.

(1) X는 ㄱ A의 전체 영역에서 참이어서는 안 된다.
(2) X는 ㄱ A의 일부 영역에서 참이어야 한다.
(3) X는 A의 일부 영역에서 참이어야 한다.

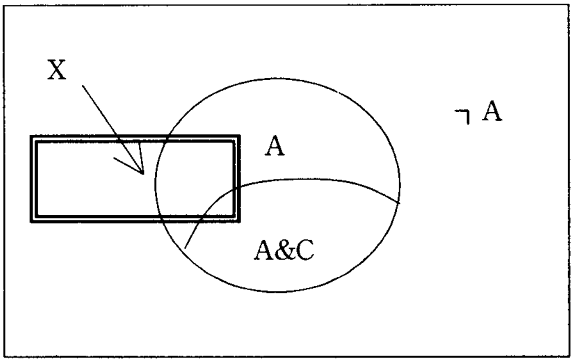
즉 X가 참인 영역은 ㄱ A 영역 전체를 다 차지해서는 안 되고, ㄱ A 영역 안에 완전히 포함되어서도 안 되며, A 영역 안에 완전히 포함되어서도 안 된다. 결국 그것은 A와 ㄱ A 영역에 걸쳐 있을 수밖에 없다. 그렇다면 확률 Pr(X)는 A 영역을 얼마나 차지하고 있는가에 의해서 뿐만 아니라 ㄱ A 영역을 얼마나 차지하고 있는가에 의해서도 영향을 받는다. 그런

23) 이 조건이 Edgington (1997)에는 빠져 있다.

데 A 부분은 같지만 ㄱA 부분은 다른, 즉 Pr(ㄱA & X)는 다른 확률 함수가 존재한다. 이 경우 Pr(A & C)와 Pr(A)는 같고, 따라서 Pr(C | A)도 같고 나아가 Pr(A & X)도 이전과 같을 것이다. 하지만 Pr(X)는 이와 다를 수밖에 없다. 왜냐하면 Pr(X) = Pr(ㄱA & X) + Pr(A & X)가 성립하는데, Pr(A & X)는 여전히 같지만 Pr(ㄱA & X)는 다르기 때문이다(아래 그림 9와 10 참조). 따라서 Pr(C | A) ≠ Pr(X)인 확률 함수가 존재한다. 증명 끝.




[그림 9]




[그림 10]

이 증명으로부터 얻을 수 있는 교훈은 무엇인가? 나는 이 증명에서 잘 드러나는 것이 바로 조건부 확률의 행태라고 생각한다. 조건문의 확률이 조건부 확률과 같을 수 없음을 보이는 과정에서 바로 조건부 확률의 특징이 잘 부각되고 있기 때문이다. 바꾸어 말하면 이 증명은 조건부 확률이 지닌 독특한 성질을 이용해 어떤 명제의 확률도 이 조건부 확률과 같을 수 없음을 보인다고 할 수 있다. 여기서 말하는 조건부 확률이 지닌 독특한 성질이란 다음 표에 나와 있는 성질이다. 이들 각각이 위의 증명에서 차례대로 이용되고 있다.

| | | |
|---|---|---|
| (i) | Pr(¬ A)이 높다 | Pr(C \| A) 조건부 확률은 낮다. |
| (ii) | Pr(A)이 낮다 | Pr(C \| A) 조건부 확률은 높다. |
| (iii) | Pr(¬ A)이 낮다 | Pr(C \| A) 조건부 확률은 높다. |

조건부 확률의 경우 위의 조합이 모두 가능하다는 점이 증명에 이용되었다. 이제 A의 확률이 높을 경우 ¬A의 확률은 낮으므로, 우리는 이를 간단히 다음과 같이 표현할 수 있을 것이다. 여기서 '↓'는 확률이 낮음을, '↑'는 확률이 높음을 나타낸다.

| | Pr(A) | 조건부 확률 | Pr(¬ A) |
|---|---|---|---|
| (i) | ↓ | ↓ | ↑ |
| (ii) | ↓ | ↑ | ↑ |
| (iii) | ↑ | ↑ | ↓ |

이 표를 보면 조건부 확률의 높고 낮음은 전건이나 전건의 부정의 확률의 높고 낮음과 별 관련이 없음을 알 수 있다. 즉 전건의 확률이 높거나 낮아도 조건부 확률은 낮거나 높을 수 있다. 벤 다이어그램 상에서 그것은 오로지 전건이 참이 되는 영역 가운데 후건이 참이 되는 영역이 얼마나 넓은지에 달려 있다. 바꾸어 말해 전건이 참이 되는 영역 자체가 얼마나 넓은지는 조건부 확률의 높고 낮음과 아무런 관련이 없는 것이다. 이는 다시 조건부 확률에서

는 전건이 거짓이 되는 경우가 논의 대상에서 제외된다는 점을 말해준다. 그 이유는 물론 조건부 확률이 (1) Pr(A | C) = Pr(A & C) / Pr(A)에 의해 정해지기 때문이다. 조건부 확률은 어떤 의미에서 '상대적 크기'의 문제이며 그래서 (1)에서도 비율로 나타나는 것이다.

이런 논의는 자연스레 조건부 확률이 과연 확률인가 하는 물음을 제기해 준다고 생각된다. 아마 많은 사람들이 (1)의 좌변에 나오는 'Pr'이란 기호 때문에 조건부 확률도 당연히 확률이라고 생각할지 모른다. 그러나 지금 쟁점이 바로 '조건부 확률'이 과연 '확률'인가라는 근본적 물음임을 생각해 본다면, 그 점은 당연히 받아들여져야 할 것이 아니다. 자세히 보면, 우리는 (1)의 좌변에 나오는 기호 Pr( | )과 우변에 나오는 기호 Pr( )가 다름을 알 수 있다. 이 점이 좌변에도 'Pr'이란 기호를 적음으로써 흐려진 것이다. 원한다면 우리는 가령 $Pr_A(C)$와 Pr(C)라고 적어 이들을 서로 구분할 수도 있을 것이다. 물론 우변에 나오는 Pr(A & C)와 Pr(A)는 각각 실제로 확률값을 가리킨다. 하지만 그렇게 해서 얻게 되는 조건부 확률은 실제로 우변에 나오는 이 값들의 '비율'이다. 즉 확률이 비율로 표현될 수도 있겠지만, 비율 자체가 바로 확률은 아니다.[24]

## 6. 조건문과 진리조건

만약 지금까지의 논의대로 조건문의 확률은 조건부 확률일 수 없고, 그 원인이 조건부 확률의 고유한 특징과 연관되어 있다면, 이런 논의가 갖는 철학적 함축은 과연 무엇일까? 물론 루이스 증명이 갖는 철학적 함축은 여러 가지일 수 있을 것이다. 하지만 이 가운데 가장 흥미로운 것은 이를 조건문은 진리값을 갖지 않는다는 논제를 지지하는 것으로 이해하는 것이다. 이런 노선은 아담스에 의해 처음 길이 열렸고, 이후 에징톤에 의해 강력하게 주장되어 왔다.[25]

---

24) 조건부 확률의 이런 특징을 지적한 사람은 많다. 사실 이 점은 조건부 확률의 정의를 자세히 살펴보면 바로 알 수 있다. 중요한 점은 이런 특징이 어떤 철학적 함축을 지니는가 하는 점일 것이다. Edgington (1986), (1995), (1997), Adams (1975), Lowe (1996), Hajek (2003) 참조.

그는 조건문의 진리조건을 제시하려는 시도가 헛된 시도로 끝날 수밖에 없다는 점을 다음과 같이 논증한다. 우선 그는 조건문의 확률이 조건부 확률로 이해될 경우 다음 두 가지 특징을 지닌다는 점에 주목한다.[26]

(1) ㄱ(A & ㄱC)이 확실하다는 최소한의 정보는 조건문 A → C가 확실하다고 하는데 충분하다.
(2) ㄱA에 대해서 높은 확률을 부여하지만 조건문 A → C에 대해서는 낮은 확률을 부여하는 것이 반드시 비합리적인 것은 아니다.

그런데 이런 두 특징은 조건문에 대한 어떤 해석에서도 동시에 만족될 수 없다. 우선 가령 진리함수적 조건문은 (1)을 만족하지만 (2)를 만족할 수는 없다. 진리함수적 조건문에서 전건이 참이면서 후건이 거짓이 아님이 확실하다면 조건문은 참이므로, (1)을 만족한다. 하지만 진리함수적 조건문은 전건이 거짓이면 조건문이 참이 되므로, 전건의 거짓에 높은 확률을 부여하고 조건문에 낮은 확률을 부여할 수는 없다. 한편 진리함수적 조건문보다 강한 해석은 (2)를 만족하지만 (1)을 만족할 수는 없다. 진리함수적 조건문보다 강한 진리조건을 갖는 조건문일 경우, 전건이 참이고 후건이 거짓이 아님이 확실하다고 하더라도 그것만으로 조건문의 참이 보장되는 것은

25) '폭탄'을 터트린 루이스 자신은 직설법적 조건문의 경우 진리함수적 분석(특히 잭슨의 견해)을 지지한다. 그가 조건문은 진리조건을 갖지 않는다는 주장으로 나아가지 않은 주된 이유는 이것이 너무 많은 대가를 치르게 된다고 보기 때문이다. 즉 조건문이 진리조건을 갖지 않고 따라서 명제를 표현하지 못한다면, 우리는 기존의 논리학을 상당 부분 수정할 수밖에 없게 되는데, 이는 그가 보기에 너무 많은 것을 새로이 시작해야 하는 부담을 지우게 된다. Lewis (1976) 참조.

26) Edgington (1995), p. 279 및 (1997), p. 116 참조.

아니므로 (1)은 만족되지 않는다. 하지만 (2)는 만족될 수 있다. 사실 (2)는 앞에서 이미 나온 조건부 확률의 특징임을 알 수 있다. 만약 조건문이 진리조건을 갖는다면, 그것은 진리함수적 진리조건이거나 그보다 강한 형태의 진리조건일 것이다. 그런데 지금 우리가 보듯이 어느 진리조건이더라도 이 두 특징을 다 지닐 수는 없다.

그러면 왜 조건문의 확률을 조건부 확률로 이해할 경우에는 위의 두 특징이 모두 만족되는 것일까? 에징톤은 이를 다음과 같이 설명한다.

> (1) A & ㄱC가 거짓임이 분명하다는 점은 A가 주어졌을 때 C임을 확실하게 하는데 충분하다. 그 이유는 어떤 명제 A * C가 A & ㄱC가 거짓일 때는 언제나 참으로 성립하기 때문이 **아니라**, 만약 A라면 C인가라는 질문이 관련된 모든 세계, 즉 **A-세계**에서 C가 참으로 성립하기 때문이다. ㄱA-세계에서 벌어지는 일은 A가 참이면 C가 참이라는 것이 어느 정도 가능성이 있는가와 아무런 관련이 없다. (2) ㄱA에 대한 높은 신념도와 만약 A라면 C에 대한 낮은 신념도가 일관적인 이유는 어떤 명제 A * C가 어떤 ㄱA-세계에서 거짓일 수 있기 때문이 **아니라**, Pr(ㄱA)가 높다는 사실은 대부분의 A-세계들이 C-세계들인지의 문제와 아무런 관련이 없기 때문이다.[27]

여기서도 우리가 다시 확인할 수 있는 것은 조건부 확률의 고유한 특징이다. 즉 A라는 조건하에서 C일 조건부 확률의 높고 낮음은 얼마 만큼의 A-세계들이 C-세계인지에 의해 정해지며 그리고 그것에 의해서만 정해진다. 달리 말해 그것은 ㄱA-세계의 성질과는 아무런 관련이 없다. 결국 에징톤의 말대로, A라는 조건 또는 가정

27) Edgington (1997), pp. 116-7. 또한 Edgington (1995), p. 280도 참조.

하에서 C를 주장하는 것과 그냥 C를 주장하는 것 사이에는 커다란 차이가 있고, 이들 둘은 어느 하나로 환원될 수 없는 근본적으로 다른 것(irreducibly distinct)일지 모른다.[28)]

## 7. 나가는 말

이 논의를 통해 우리는 조건부 주장은 그냥 주장과 다르다고 하는 아주 사소한 진리를 확인하게 되었는지도 모른다. 즉 조건부 주장은 말 그대로 **조건부** 주장일 따름이다. 그리고 그것은 우리가 이미 잘 알고 있던 사실인지도 모른다. 하지만 조건부 주장이 실제로는 주장이 아니라 참/거짓을 따질 수 없는 **사이비** 주장일지 모른다는 사실은 우리가 잘 모르고 있었던 것이다. 바꾸어 말한다면, 우리가 알고 있던 조건문이 조건 명제를 표현하는 것이 아니라, 사실은 사이비 명제를 표현하는 것일지 모른다는 주장은 진부한 주장이 결코 아니다.

그럼에도 불구하고 "글쓴이인 내가 다음 대선에 출마한다면, 나는 대통령에 당선될 것이다"라는 조건부 주장과 "(현재 유력한 대통령 후보 중 한 사람을 염두에 두고) 그 사람이 다음 대선에 출마한다면, 그는 당선될 것이다"라는 조건부 주장 사이에는 커다란 차이가 있는 것으로 보인다. 우리는 이 직관을 어떻게 설명할 것인가? 만약 그 차이가 어떤 사실에 기반을 둔 것이 아니라면, 그 객관성은 어디에서 오는 것일까? 이를 위해서는 많은 논의가 필요할 것 같다.[29)]

28) Edgington (1997), p. 117.
29) 심사위원 두 분의 지적에 감사를 드린다.

# 참 고 문 헌

Adams, E. 1965, "A Logic of Conditionals", *Inquiry* 8, pp. 166-97.

Adams, E. 1966, "Probability and the Logic of Conditionals", in *Aspects of Inductive Logic*, ed by J. Hintikka and P. Suppes (North Holland), pp. 256-316.

Adams, E. 1975, *The Logic of Conditionals* (D. Reidel).

Adams, E. 1998, *A Primer of Probability Logic* (CSLI Publications).

Appiah, A. 1985, "The Importance of Triviality", *Philosophical Review* 95, pp. 209-231.

Bennett, J. 2003, *A Philosophical Guide to Conditionals* (Oxford Univ. Press).

Blackburn, S. 1986, "How Can We Tell Whether a Commitment Has a Truth Condition?", in *Meaning and Interpretation*, ed. by C. Travis (Blackwell), pp. 201-232.

Carlstrom, I. F. and Hill, C. S. 1978, Review of Adams' *The Logic of Conditionals*, *Philosophy of Science* 45, pp. 155-158.

Edgington, D. 1986, "Do Conditionals Have Truth-Conditions?", reprinted in Jackson (1991), pp. 176-201.

Edgington, D. 1995, "On Conditionals", *Mind* 104, pp. 235-329.

Edgington, D. 1997, "Commentary", in *Conditionals*, M. Woods (Oxford Univ. Press), pp. 95-137.

Hajek, A. 1994, "Triviality on the Cheap?", in *Probability and Conditionals*, ed. by E. Eells and B. Skyrms (Cambridge Univ. Press), pp. 113-140.

Hajek, A. 2003, "What Conditional Probability Could Not Be", *Synthese* 137, pp. 273-323.

Jackson, F. ed. 1991, *Conditionals* (Oxford Univ. Press).

Kolmogorov, A. N. 1933, *Foundations of the Theory of Probability*, trans. by N. Morrison (Chelsea Pub. Co., 1950).

Lewis, D. 1976, "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities", reprinted in Jackson (1991), pp. 76-101.

Lewis, D. 1986, "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities II", reprinted in Jackson (1991), pp. 101-110.

Lowe, E. J. 1996, "Conditional Probability and Conditional Beliefs", *Mind* 105, 603-615.

Milne, P. (1997), "Quick Triviality Proofs for Probabilities of Conditionals", *Analysis* 57 (1997), pp. 75-80.

Sainsbury, M. 2001, *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*, 2nd ed. (Blackwell).

Stalnaker, R. 1970, "Probability and Conditionals", reprinted in *Ifs*, ed. by W. L. Harper, R. Stalnaker, and G. Pearce (D. Reidel), pp. 107-128.

Stalnaker, R. 1976, Letter by Stalnaker to van Fraassen, in *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science*, vol. 1, ed. by W. L. Harper and C. A. Hooker (D. Reidel), pp. 302-306.

Van Fraassen, Bas 1976, "Probabilities of Conditionals", in *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science*, vol. 1, ed. by W. L. Harper and C. A. Hooker (D. Reidel), pp. 261-300.