ŁC, LC를 위한 루트리-마이어 의미론

: 실질 함의의 역설과 다치 함의의 대안적 특성들1)

양은석

【Abstract】 In this paper, we provide Routley-Meyer semantics for the many-valued logics ŁC and LC, and give completeness for each of them. This result shows the following two: 1) Routley-Meyer semantics is very powerful in the sense that it can be used as the semantics for several sorts of logics, i.e., many-valued logic, not merely relevance logic and substructural logic. Note that each implication of ŁC and LC does not (partially) result in "paradoxes of material implication". 2) This implies that Routley-Meyer semantics can be also used not merely for relevance systems but also for other logical systems such as ŁC and LC, each of which has its own implication by which we can overcome (partially) the problem of "paradoxes of material implication".

【주요어】 루트리-마이어 의미론, ŁC, LC, (무한) 다치 논리, (실질) 함의 역설

1. 들어가는 말

1970년대 초 루트리와 마이어는 우리에게 가능 세계 의미론으로 널리 알려진 (직관주의 논리와 양상 논리를 위한) 크립키의 이항 관계 의미론을 삼항 관계로 일반화 하여 고전 논리와 양상 논리(의 함의)가 지닌 함의 역설을 극복할 수 있는 연관 논리를 위한 의미론을 제공하였다.([8, 9, 10]) 소위 "루트리-마이어 의미론"이라고 불리는 삼항 관계 의미론은 연관 논리 뿐만 아니라 최근 (부분) 구조 논리(substructural logics)를 위한 의미론으로 활용될 만큼([7] 참조) 그 범위가 확대 되었다.

---

1) 이 논문은 2003년 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.
(KRF-2003-074-AS0018) 논문이 수정, 보완되는데 도움을 주신 심사위원들께 감사드린다.

이 논문에서는 다치 논리의 가장 일반적인 형태인 무한 다치 체계에 루트리-마이어 의미론을 제공함으로써 먼저 루트리-마이어 의미론이 (부분) 구조 논리뿐만 아니라 다른 종류의 논리에도 적용될 수 있는 매우 강력한 의미론이라는 점을 예증한다. 이를 위하여 이 글에서는 우리에게 잘 알려진 두 무한 다치 체계 우카세비츠의 ŁC와 더밋의 LC에 루트리-마이어 의미론을 제공하여 각 체계의 완전성을 보인다.

우리는 두 체계가 'A∧~A의 모순 형태의 진술로부터 모든 진술이 따라 나올 수 있고(불합리성absurdity), A∨~A 형태의 진술은 어떤 진술로부터도 따라 나올 수 있다(사소성triviality)'는 실질 함의의 역설을 (부분적으로) 극복할 수 있다는 점에 주목한다. ŁC의 함의 경우, 불합리성과 사소성이 모두 타당하지 않아 나름대로 실질 함의의 역설을 극복한 함의로 간주될 수 있다. 그 점에서 ŁC는 일종의 (단, 긍정역설을 받아들인 다는 점에서 부분적인) 연관 논리로 간주될 수 있다. LC의 함의 경우, 불합리성을 받아들이되 사소성을 받아들이지 않아 부분적으로 실질함의의 역설을 극복한 함의로 간주될 수 있다. 첫째와 이 두 사실을 바탕으로 우리는 루트리-마이어 의미론이 연관 논리 체계 R, E, T뿐만 아니라 실질 함의의 역설을 부분적으로 해결할 수 있는 또 다른 체계들에 적절히 활용될 수 있다는 점 또한 예증한다.

편의상 특별히 각 체계를 구별할 필요가 없다면 우리는 Ł(L)C 체계들 더 간단히 Ł(L)C에 의해 ŁC, LC 모두를 함께 표현할 것이다, 그러나 문맥에 따라 독자는 어떤 체계를 의미하는 지를 충분히 알 수 있을 것이다. 루트리-마이어[8, 9, 10]와 던[2, 3]에 의존해서 우리는 Ł(L)C 체계를 위한 완전성을 줄 수 있다.

2. Ł(L)C를 위한 공리 도식과 규칙들

편의상 우리는 이 절에서 Ł(L)C를 위한 공리 도식과 추론 규칙만을 제시한다. 나머지 것들에 대해서는 통상의 기보법과 용어법을 따른다. Ł(L)C는 다음의 공리 도식과 추론 규칙을 통해 형식화될 수 있다.

[공리도식1] Ł(L)C의 공리 도식은 다음의 형식으로 주어진다:

A0.	$A \to A$	(자기-함의)
A1.	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	(접두화)
A2.	$A \to ((A \to B) \to B)$	(단언)
A3.	$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$	(축소)
A4.	$A \wedge B \to A, \quad A \wedge B \to B$	(∧-제거)
A5.	$((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$	(∧-도입)
A6.	$A \to A \vee B, \quad B \to A \vee B$	(∨-도입)
A7.	$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$	(∨-제거)
A8.	$(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(배분)
A9.	$A \to (B \to A)$	(긍정역설)
A10.	$A \to \neg\neg A$	(구성이중부정)
A11.	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	(대우)
A12.	$(A \to B) \vee (B \to A)$	(연쇄)
A13.	$\neg\neg A \to A$	(고전이중부정)
A14.	$((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$	

[추론규칙2] Ł(L)C의 추론 규칙은 다음과 같다:

(MP) 긍정식: A와 $A \to B$로부터 B를 추론할 수 있다;

(AD) 연접: A와 B로부터 $A \wedge B$를 추론할 수 있다.

[정의3]

(df1) $A \& B := \neg(A \to \neg B)$[2)]

(df2) $A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A)$

(df3) $A \vee B := (A \to B) \to B$

[체계들4]

LC: A1 – A12 + MP, AD + df2;

ŁC: A1, A9 – A11, A13, A14[3)] + MP, AD + df1 – df3.

---

2) 참고로 ŁC에서 $A \to B$ 는 $\neg(A \& \neg B)$와 동치이고, $A \wedge B$ 는 $A \& (A \to B)$로 정의될 수 있다. $A \vee B$ 는 ŁC와 LC 모두에서 $((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)$로 정의될 수 있다.

Γ를 가정으로 간주되는 식들의 집합이라고 하자. 우리는 Γ로부터의 *연역*을 거기서 각각의 원소가 (i) Γ의 원소이거나, (ii) 공리이거나, (iii) 연역 규칙들을 이용하여 앞 선 열의 원소로부터 따라 나오는 식들의 열 A_1, ⋯ , A_n 이라고 하자. Γ ⊢ A 는 A가 Γ에서 *연역될 수 있다*는 것을 의미한다. 널리 알려진 대로 LC는 고전 연역 정리(classical deduction theorem)와 같은 연역 정리를 갖는다. ŁC 경우 다음의 변형된 연역 정리를 갖는다.

[연역정리] ([6] 정리 2.2.18)
A^n을 n 인자들(factors)의 A& ⋯ &A 라고 하자.

$$\Gamma, A \vdash_{ŁC} B \text{ iff } \Gamma \vdash_{ŁC} A^n \rightarrow B \text{ 인 n이 있다.}$$

---

3) ŁC의 공리화와 관련해서는 [6]의 정의3.1.3을 참조. 참고로 [6]에서는 접두화 대신 접미화를 부정을 위한 공리로 (*) (¬A→¬B)→(B→A)를 취하고 있으나, 우리는 LC와 관련된 논의(의 편의)를 위하여 A1, A10, A11, A13을 대신 채택한다. 접미화는 다음의 방식으로 얻어질 수 있다: A1, A14, A9에 의해 긍정식을 사용하여 A2를 얻을 수 있다는 데 유의하자 (1. A→((B→A)→A) (A9), 2. ((B→A)→A)→((A→B)→B) (A14), 3. A→((A→B)→B) (A1, 1, 2, MP)). A1, A2를 이용하여 우리는 순열 정리 (**) (A→(B→C))→(B→(A→C))를 얻을 수 있다.([1] 80쪽) 따라서 A1과 순열정리, 그리고 긍정식을 이용해 접미화를 얻을 수 있다. (비슷한 방식으로 접미화로부터 접두화를 얻을 수 있다.)
순열 정리, 나머지 정리 (***) (A→(B→C))↔((A&B)→C)와 A10, A11, A13으로부터 이중 부정의 특성에 의해 다음처럼 (*)를 증명할 수 있다: 1. (¬A→¬B)→(¬¬B→¬¬A) (A11), 2. B→((¬A→¬B)→¬¬A) (1, **, A10, A1, MP), 3. (¬A→¬B)→(B→¬¬A) (3, **), 4. ((¬A→¬B)&B)→¬¬A (3, ***), 5. ((¬A→¬B)&B)→A (4, A1, A13, MP) 6. (¬A→¬B)→(B→A) (5, ***). (*)로부터 A10, A11, A13이 따라 나올 수 있다는 사실과 관련해서는 [6]의 보조정리3.1.6을 참조할 것.
A0는 긍정부분에 관한 한 LC가 **R**의 확장이라는 점을 강조하기 위해 덧붙인 것이다. ŁC에서 A12는 정리로 얻어지며 AD 규칙 또한 불필요하다. ŁC에서 A14는 df3에 의해 (A∨B)→(B∨A)에 해당하고 이는 A6, A7, AD, MP에 의해 얻어질 수 있다. 따라서 (A6, A7이 ŁC의 정리에 해당하기 때문에) 우리는 A14 대신 A6, A7을 공리로 택할 수 있다.

3. Ł(L)C를 위한 루트리-마이어 프레임과 모델

편의상 우리는 [2, 3]에서의 연관 논리 **R** 또는 그것의 긍정 부분 $\mathbf{R}^+$를 위한 정의와 증명으로부터 아이디어를 채택한다. 긍정부분에 관한 한 LC는 $\mathbf{R}^+$에 A9 긍정역설과 A12 연쇄를 더한 체계라는 점에 주목하자.

우리는 연관(relevant) 모델 구조를 루트리-마이어 프레임이라고 부른다. [1, 2, 4]를 따라서, 우리는 (루트리-마이어) 프레임을 정의한다. 프레임은 다음 정의와 공준을 만족하는 U가 (그것의 원소가, 루트리가 셋업(set-ups)이라고 부른 그리고 우리가 정보 상태(information states)로 간주하는,) 공집합이 아닌 집합이고 R이 U 위에서 3항 관계이고4) $\mathit{0} \in$ U 이고 * 가 U 위에서 일항 연산인 구조 S = (U, R, $\mathit{0}$, *) 이다: (U에 속하는 모든 α, β, γ, δ에 대하여)

df4. $\alpha \sqsubseteq \beta := R\mathit{0}\alpha\beta$

df5. $R^2\alpha\beta\gamma\delta := \exists\chi(R\alpha\beta\chi\ \&\ R\chi\gamma\delta)$

df6. $R^2\alpha(\beta\gamma)\delta := \exists\chi(R\alpha\chi\delta\ \&\ R\beta\gamma\chi)$

p1. $(R\alpha\beta\gamma\ \&\ \alpha'\sqsubseteq\alpha) \Rightarrow R\alpha'\beta\gamma$ (단조성)

p2. $R\mathit{0}\alpha\alpha$; $\alpha\sqsubseteq\beta$ and $\beta\sqsubseteq\gamma \Rightarrow \alpha\sqsubseteq\gamma$

p3. $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow R\beta\alpha\gamma$

p4. $R\alpha\alpha\alpha$

p5. $R^2\alpha\beta\gamma\delta \Rightarrow R^2\alpha(\beta\gamma)\delta$

p6. $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha \sqsubseteq \gamma$

p7. $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow R\alpha\gamma^*\beta^*$

p8. $\alpha\sqsubseteq\alpha^{**}$

p9. $\alpha^{**}\sqsubseteq\alpha$

p10. $R\mathit{0}\alpha\beta$ 또는 $R\mathit{0}\beta\alpha$, i.e., $\alpha\sqsubseteq\beta$ 또는 $\beta\sqsubseteq\alpha$.

4) Rxyz는 x, y 정보 부분의 조합이 z에 포함되는 정보 부분인 (즉 $x \circ y \sqsubseteq z$ 와 같은) 관계로 간주될 수 있다. x, y, z는 비일관적이고 불완전한 (그러나 항상 프라임일 수 있는) 일종의 가능세계로 간주될 수 있다.

LC: p1 — p8, p10;
ŁC: p1 — p2, p4 — p9.

p1 - p5의 공준이 [1, 2, 9]에서 연관 논리 $\mathbf{R}^+$를 위한 공준이라는 데 유의하자.5) 따라서 LC의 긍정부분을 위해서 우리는 A9을 위한 공준 p6와 A12을 위한 공준 p10만 덧붙이면 된다. 부정에 관한 한 LC는 공리 A13를 갖지 않기 때문에 p9 대신 p8을 채택한다. p7, p8은 각각 A11, A10을 위한 공준이라는 데 유의하기 바란다. p5는 A1을 위한, p4는 A14을 위한 공준이다. 따라서 ŁC의 공리들과 관련해서는 A13를 위해서 p8의 역 p9가 필요하다는 것을 지적하는 것으로 충분하다.6) 던과 하디그리의 [3, 4]를 따라, 우리는 U를 "정보 상태들"의 집합으로 간주한다. α, $\beta \in$ U 에 대하여, $\alpha \sqsubseteq \beta$ 는 α의 정보가 β의 정보에 포함된다는 것을 의미한다.

Ł(L)C를 위한 모델에 의해, 우리는 (U, R, $\boldsymbol{0}$, *), 가 프레임이고 $\models$이 다음 진리조건을 만족하는 U로부터 Ł(L)C의 문장들로의 관계인 구조 **M**, = (U, R, $\boldsymbol{0}$, *, $\models$), 을 의미한다.

(원자세습조건(AHC): Atomic Hereditary Condition)
(명제 변항 p에 대하여) $\alpha \models p$ 이고 $\alpha \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \models p$;
(진리치 조항(EC): Evaluational Clauses)   식 A, B 에 대하여,
($\wedge$) $\alpha \models A \wedge B \Leftrightarrow \alpha \models A$ 그리고 $\alpha \models B$;
($\vee$) $\alpha \models A \vee B \Leftrightarrow \alpha \models A$ 또는 $\alpha \models B$;
($\rightarrow$) $\alpha \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \beta, \gamma\ (\in U)$ ($R\alpha\beta\gamma$ 이고 $\beta \models A$ 이면, $\gamma \models B$);
($\neg$) $\alpha \models \neg A \Leftrightarrow \alpha^* \not\models A$.

5) 우리는 프레임이 부분순서를 만족한다는 점을 분명히 하기 위해 [9]에서 $\mathbf{R}^+$를 위해 사용되었으나 [2, 3, 10]에서 생략된 이행 조건을 p2에 추가한다.

6) ŁC의 긍정 부분 경우, $\mathbf{R}^+$를 위한 공리 중 A3가 타당하지 않다. (루트리-마이어 의미론에서 A3 경우 p3 - p5의 공준을 함께 사용하거나 $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow R^2\alpha\beta\beta\gamma$를 공준으로 사용할 수 있다.([3] 참조)) 관련하여 A2의 경우 일반적으로 p3의 조건이 필요하나 ŁC 경우 df3에 의해 p3의 공준이 없어도 된다.

0 ⊨ A 인 경우에 A는 **M** 에서 **입증된다**(verified). U에 속하는 모든 χ 에 대해 만약 χ ⊨ A 라면 χ ⊨ B 일 경우, A는 **M** 에서 B를 **함축**한다(entails). 모든 모델에서 A가 입증될 경우, A는 Ł(L)C-**타당하다**.

다음의 사실에 주목하자. Σ를 거기서 ⊑가 임의의 α, β ∈ U 에 대하여 α⊑β 이거나 β⊑α라는 의미에서 연결된(connected) 프레임들의 집합이라고 하자. 선형 순서는 연결된 부분 순서이다. 그렇다면 **선형 프레임**은 거기서 ⊑가 U 위에서 선형 순서인 구조 **S**, = (U, ⊑, R, 0, *), 이다. p10 은 (루트리-마이어) 프레임이 선형 프레임이라는 것을 보여준다.

4. Ł(L)C의 건전성

[2, 3]을 따라 우리는 Ł(L)C를 위한 건전성을 보인다. Ł(L)C는 **R** (또는 **R**$^+$)와는 같은 진리(치)조항을 갖기 때문에, 우리는 아래 두 보조 정리를 직접 진술할 수 있다. 우리는 단지 전자가 후자의 보조 정리를 증명하는 데 필요하다는 것만 지적한다.([12] 보조정리 4.1, 4.2 참조)

[보조정리5] 세습(Hereditary) 조건(HC)

임의의 식 A에 대하여, α ⊨ A 이고 α ⊑ β 이면, β ⊨ A.

[보조정리6] 입증(Verification) 보조정리

주어진 모델 M 에서 A가 B를 함축한다면 그 모델에서 A→B는 입증된다. 즉 모든 χ(∈ U)에 대해 만약 χ ⊨ A 라면 χ ⊨ B 일 경우, ζ ⊨ A→B 이다.

$\vdash_{Ł(L)C}$ A 를 Ł(L)C에서 A가 정리인 것이라고 하자. 이제 우리는 Ł(L)C 의 건전성을 다음으로 증명한다.

[정리7] (약한(weak)) 건전성(soundness)

$\vdash_{Ł(L)C}$ A 이면, $\models_{Ł(L)C}$ A 이다.

증명: 먼저 우리는 공리 도식들의 각 사례가 모든 프레임에서 타당하다는 즉 Ł(L)C-타당하다는 것을 보인다. LC(의 긍정부분)에 관한 한 LC는 A9, A12을 제외한 나머지 긍정 부분이 **R**과 같기 때문에, [2]의 §48.3의 건전성 정리(또는 [10]의 정리 2)에 의해 두 공리 도식을 제외한 나머지 긍정 공리 도식들의 각 사례는 LC-타당하다. 따라서 우리는 A9 - A12이 LC-타당하다는 것을 보인다.

A9을 위하여 [보조정리6]에 의해 $\alpha \vDash A$ 를 가정하고 $\alpha \vDash B \rightarrow A$ 임을 보이는 것으로 충분하다. 후자를 보이기 위해 우리는 p6 ($R\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha \sqsubseteq \gamma$)가 성립한다(hold)는 것과 $\beta \vDash B$ 라는 것을 가정하고서 $\gamma \vDash A$ 임을 보인다. $\alpha \vDash A$, $\alpha \sqsubseteq \gamma$ 이기 때문에 이는 세습조건과 가정에 의해 즉각 따라 나온다.

A10을 위하여 p8이 성립하고 $\alpha \vDash A$ 를 가정하고 $\alpha \vDash \neg\neg A$ 임을 보인다. 가정에 의해 $\alpha \sqsubseteq \alpha^{**}$ 이기 때문에 $\alpha^{**} \vDash A$ 이다. 그렇다면, (¬)에 의해 $\alpha^{*} \nvDash \neg A$ 이고 다시 (¬)에 의해 $\alpha \vDash \neg\neg A$ 이다.

A11를 위하여 $\alpha \vDash A \rightarrow B$ 를 가정하고 $\alpha \vDash \neg B \rightarrow \neg A$ 임을 보인다. 후자를 보이기 위해 우리는 p7이 성립하고 $\beta \vDash \neg B$ 라는 것을 가정하고서 $\gamma \vDash \neg A$ 임을 보인다. (¬)에 의해 우리는 $\gamma^{*} \nvDash A$ 임을 보여야 한다. 모순을 끌어내기 위해 $\gamma^{*} \vDash A$ 라고 하자. 그렇다면 $R\alpha\gamma^{*}\beta^{*}$ 와 (→)에 의해 $\beta^{*} \vDash B$ 이다. 따라서 (¬)에 의해 $\beta \nvDash \neg B$ 이고 이는 가정과 모순된다.

A12은 [12] 명제 4.3에 의해 성립한다. (참고로 증명은 다음과 같다: 우리는 p10이 성립한다는 것을 가정하고서, $\alpha \vDash A$ 이면 $\alpha \vDash B$ 이거나 $\beta \vDash B$ 이면 $\beta \vDash A$라는 것을 보인다. $\alpha \nvDash B$ 인 $\alpha \vDash A$ 그리고 $\beta \nvDash A$ 인 $\beta \vDash B$ 가 있다고 하자. 세습조건에 의해 이는 $\alpha \sqsubseteq \beta$ 도 $\beta \sqsubseteq \alpha$ 도 아니라는 것을 함축한다. 따라서 $R0\alpha\beta$ 도 $R0\beta\alpha$ 도 아니다. 그러므로 대우에 의해 p10이 성립한다면, $\alpha \vDash A$ 이면 $\alpha \vDash B$ 이거나 $\beta \vDash B$ 이면 $\beta \vDash A$ 이다.)

ŁC를 위해서 우리는 A13가 ŁC-타당하다는 것을 추가로 보이면 된다.

A13를 위하여 p9이 성립하고 $\alpha \vDash \neg\neg A$ 를 가정하고 $\alpha \vDash A$ 임을 보인다. 가정과 (¬)에 의해 $\alpha^{*} \nvDash \neg A$ 이고 다시 (¬)에 의해 $\alpha^{**} \vDash A$ 이다. 따라서 $\alpha^{**} \sqsubseteq \alpha$ 이기 때문에 $\alpha \vDash A$ 이다.

다음으로 긍정식과 연접 규칙이 Ł(L)C-타당성을 보존한다는 것을 보일 필요가 있다. 공준 p4에 의해 임의의 $\alpha \in U$ 에 대하여 $\alpha \models A \to B$ 이고 $\alpha \models A$ 이면, $\alpha \models B$ 이다. 그리고 ($\wedge$)에 의해 $\alpha \models A$ 이고 $\alpha \models B$ 이면 $\alpha \models A \wedge B$ 이다. 따라서 긍정식과 연접 규칙이 Ł(L)C-타당성을 보존한다는 것이 즉각 따라 나온다. □

5. Ł(L)C의 완전성

우리는 양상 논리의 (단 극대 이론(maximal theries) 대신 프라임 이론(prime theories)을 갖는) 헨킨 식 증명을 사용해 Ł(L)C를 위한 완전성을 보인다. 이를 위해 몇몇 이론을 정의한다. 먼저 $\vdash_{Ł(L)C}$를 논리 Ł(L)C의 연역적 귀결 관계로 해석한다. Ł(L)C-**이론(Ł(L)C-theory)**에 의해 우리는 (Ł(L)C에서의) 연역성 즉 (Ł(L)C에서) 긍정식과 연접 아래 닫힌 문장들의 집합 T를 의미한다. T를 Ł(L)C 이론이라고 하자. **프라임 Ł(L)C-이론** (prime Ł(L)C-theory)에 의해 $A \vee B \in T$ 이면, $A \in T$ 이거나 $B \in T$ 인 이론을 의미한다. **사소한 Ł(L)C-이론(trivial Ł(L)C-theory)**에 의해 Ł(L)C의 문장들의 전 집합을 의미한다. 던이 [4]의 [주의4]에서 진술하듯이, 우리는 Ł(L)C-이론 T가 Ł(L)C의 모든 정리를 포함한다는 것에 주목한다. 따라서 그것은 연관 논리 저서에서 (정리를 포함하는) "정규 이론(regular theory)"이라고 부르는 것이다. 즉 Ł(L)C-이론에 의해 우리는 Ł(L)C의 모든 정리를 포함하는 (정규) Ł(L)C-이론을 의미한다. 이것은 또한 T가 공집합일 수 없다는 것을 의미한다. 우리는 "Ł(L)C-이론"에 의해 사소하지 않은 이론을 또한 의미한다.

$\nvdash_{Ł(L)C}$ A 라고 하자. 이제 우리는 **표준 Ł(L)C-프레임(canonical Ł(L)C-frame)**이 기초 정보 상태 0_{can}이 A를 배제하는 즉 $\nvdash_{Ł(L)C}$ A 인 프라임 정규 Ł(L)C-이론이고, U_{can}이 0_{can}을 확장하는 프라임 Ł(L)C-이론들의 집합이고, R_{can}이 U_{can}에 제약된 아래의 R이고

(1) $R\alpha\beta\gamma$는 Ł(L)C의 임의의 식 A, B에 대하여 $A \rightarrow B \in \alpha$ 이고 $A \in \beta$ 이면 $B \in \gamma$ 이다와 동치이다,

$^*_{can}$이 U_{can}에 제약된 * 인 구조 S = (U_{can}, R_{can}, O_{can}, $^*_{can}$) 라고 하자. 우리는 Ł(L)C의 각각의 공리 도식에 대하여 그에 상응하는 의미론적 공준이 성립할 경우 프레임이 Ł(L)C에 적합(fitting)하다고 한다. α가 프라임 이론인 데서 α^* 가 $\neg A$가 α에 속하지 않는 즉

(2) $\alpha^* = \{A: \neg A \not\in \alpha\}$

인 식 A의 집합이라고 하자. (α^*가 프라임 이론이라는 것은 다음으로 증명될 수 있다: A, B $\not\in \alpha^*$ 라고 하자. 그렇다면, $\neg A$, $\neg B \in \alpha$ 이다. 연접규칙에 의해 $\neg A \wedge \neg B \in \alpha$ 이고, 다시 드 모르강 법칙에 의해 $\neg(A \vee B) \in \alpha$ 이다. 따라서 $A \vee B \not\in \alpha^*$ 이다. 그러므로 대우에 의해 α^*가 프라임 이론이라는 것이 따라 나온다.)

$\sqsubseteq_{can}$ 즉 표준 Ł(L)C-프레임의 부분 순서와 선형 순서는 U_{can}에 제약된 $\subseteq$에 의존한다. 그렇다면 우선 다음은 분명하다.

[명제8] 표준 Ł(L)C-프레임은 부분적으로 순서 지어진다.

[명제9] 표준 Ł(L)C-프레임은 연결된다(connected) 즉 선형적으로 순서 지어진다.

증명; [12]의 [명제3]에 의해. □

[정리10] 표준적으로 정의된 Ł(L)C-프레임은 Ł(L)C에 적합한 프레임이다.

증명; 표준 LC-프레임이 LC에 적합한 프레임이라는 것을 보이기 위해, 우리는 p1에서 p8 그리고 p10이 성립한다(hold)는 것을 보일 필요가 있다. [2]의 §48.3의 완전성 정리에 의해 p1에서 p5는 성립한다. (p2의 이행성 부분과 관련해서는 [9]의 보조정리 6을 참조할 것.) 그리고 [10]의 보조정리 13에 의해 p7이, [명제9]에 의해 p10이 성립한다.

따라서 표준 LC-프레임이 LC에 적합한 프레임이라는 것을 보이기 위해, 우리는 p6, p8을 증명할 필요가 있다.

p6을 위하여 우리는 $R\alpha\beta\gamma$ 와 $A \in \alpha$를 가정한다. A9에 의해 $A \rightarrow (A \rightarrow A)$, $A \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A)$가 정리이기 때문에, 우리는 또한 $A \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A) \in \alpha$ 와 $A \rightarrow (A \rightarrow A) \in \beta$를 가정할 수 있다. 그렇다면 긍정식에 의해 $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A \in \alpha$ 이다. 이제, $R\alpha\beta\gamma$, $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A \in \alpha$, 그리고 $A \rightarrow (A \rightarrow A) \in \beta$ 이기 때문에, (1)에 의해 $A \in \gamma$ 이다. 따라서, α 에 속한 모든 원소들은 γ 에도 속할 수 있다, 즉 $\alpha \sqsubseteq_{can} \gamma$ 이다.

p8을 위하여 우리는 $A \in \alpha$ 를 가정한다. 그렇다면 A10에 의해 $\neg\neg A \in \alpha$ 이다. 따라서 (2)에 의해 $\neg A \notin \alpha^*$ 이고 $A \in \alpha^{**}$ 이다. 그러므로 p8을 만족한다.

표준 ŁC-프레임이 ŁC에 적합한 프레임이라는 것을 보이기 위해, 우리는 p9이 성립한다는 것만 추가로 보이면 된다.

p9을 위하여 우리는 $A \in \alpha^{**}$ 를 가정한다. 그렇다면 (2)에 의해 $\neg A \notin \alpha^*$ 이고 $\neg\neg A \in \alpha$ 이다. 따라서 A13에 의해 $A \in \alpha$ 이다. □

다음으로 우리는 $S_1 = (U_{can}, R_{can}, 0_{can}, {}^*_{can})$, 위에서 적절한 관계 ⊨을 정의할 필요가 있다. 우리는 그것을 다음으로 정의한다.

$$\alpha \models A \text{ iff } A \in \alpha$$

하지만 이것이 위의 진리치 조항들 즉 원자세습조건(AHC)과 진리치조항(EC)을 만족한다는 것을 입증할 필요가 있다. 긍정부분에 관한 한, Ł(L)C의 긍정 부분이 [2] §42.1의 [정의1]을 만족하기 때문에 우리는 R^+를 위해 고려되는 §48.3의 [사실1], [사실2]를 직접 사용할 수 있고 따라서 같은 부분의 [정리2]를 사용할 수 있다.7)

7) Ł(L)C는 A12를 정리(또는 공리)로 갖기 때문에 Ł(L)C에서 이론 T의 완전성과 (비)일관성은 일반적으로 사용되는 부정에 관한 완전성과 비일관성 대신 다음으로 정의될 수 있다([6] 참조): 식들의 각 쌍 A, B에 대하여, $T \vdash_{Ł(L)C} A \rightarrow B$ 이거나 $T \vdash_{Ł(L)C} B \rightarrow A$ 인 경우, T는 완전(complete)하다; $T \vdash_{Ł(L)C} \mathbf{f}$ 일 경우, T는 비일관적

[명제11] 표준적으로 정의된 (U_{can}, R_{can}, 0_{can}, $^{*}{}_{can}$, ⊨) 은 Ł(L)C-모델이다.

증명; AHC와 EC를 위한 (∧), (∨), (→)은 [2]의 §48.3의 정리 2에 의해 성립한다. 따라서 우리는 EC를 위한 (¬)만 증명하면 된다.

(¬)을 위하여 A = ¬B 이고 α^{*} = {C: ¬C ∉ α} 라고 하자. ŁC 경우, 이중부정에 의해 [2]의 §48.5의 증명과 같다. 즉 A ∈ α iff ¬¬A ∈ α, 즉 ¬A ∉ α^{*} 이다. LC 경우, 좌에서 우를 위해 ¬B ∈ α 라고 하자. 그렇다면 p8에 의해 ¬B ∈ α^{**} 이다. 정의에 의해 ¬¬B ∉ α^{*} 이고, 따라서 B ∉ α^{*} 이다. 우에서 좌를 위해 ¬B ∉ α 라고 하자. 정의에 의해 B ∈ α^{*} 이다. 따라서 대우에 의해 우에서 좌가 성립한다. 그러므로 ⊨의 표준 정의는 (¬)을 만족한다. □

따라서 (U_{can}, R_{can}, $\boldsymbol{0}_{can}$, $^{*}{}_{can}$ ⊨) 은 Ł(L)C 모델이다. 그러므로 헨킨 식 구성에 의해 ***0*** 이 우리가 선택한 정리가 아닌 A를 배제하고 ⊨의 표준적 정의가 속함(memebership)과 일치하기 때문에, 우리는 각각의 Ł(L)C의 정리가 아닌 A에 대하여 A가 ***0*** ⊭ A 인 Ł(L)C 모델이 있다고 할 수 있다. 이는 우리가 다음과 같은 Ł(L)C를 위한 (약한) 완전성((weak) completeness)을 얻도록 한다.

[정리12] (약한weak) 완전성completeness

$\models_{Ł(L)C}$ A 이면, $\vdash_{Ł(L)C}$ A 이다.

다음으로 Ł(L)C를 위한 강한 완전성(strong completeness)을 증명해보자. 우리는 A가 식들의 집합 Γ의 Ł(L)C **귀결**을 다음과 동치인 것으로 정의한다: A는 식들의 집합 Γ의 귀결이다 iff 모든 Ł(L)C 모델 M에 대하여, 각각의 B ∈ Γ 에 대해 α ⊨ B 일 때마다 ***0*** ⊨ A 이다. 우리는 A가

(inconsistent)이다. 그렇지 않을 경우, T는 일관적(consistent)이다. (두 체계 모두 배중률(A∨~A)을 정리로 갖지 않기 때문에 연관 논리 **R**에서처럼 프라임 이론의 성질에 의해 극대 이론이 A, ~A 모두를 갖는 경우 그래서 비일관성을 야기하는 경우를 특별히 고려할 필요가 없다.)

Γ로부터 Ł(L)C-**연역될 수 있다**(deducible)는 것이 A가 Γ를 포함하는 모든 정규 Ł(L)C 이론에 속하는 것 즉 $B \in Th(\Gamma \cup Ł(L)C)$을 의미하는 것으로 정의한다. 그렇다면,

[명제13] $\Gamma \nvdash_{Ł(L)C} A$ 이면, $\Gamma \subseteq \zeta$ 이고 $A \not\in \zeta$ 인 프라임 이론 ζ가 있다.

증명; 편의상 우리는 LC에 관한 프라임 이론이 있다는 것을 한 예로 증명한다. LC의 정합식들의 열거 $\{A_n: n \in \omega\}$ 를 취하자. 우리는 집합들의 열을 귀납에 의해 다음처럼 정의한다:

$\zeta_0 = \{A: \Gamma \vdash_{LC} A\}$
$\zeta_{i+1} = Th(\zeta_i \cup \{A_{i+1}\})$ $\zeta_i, A_{i+1} \vdash_{LC} A$ 가 아닐 경우
ζ_i 그 외

이제 ζ를 이러한 ζ_n들 모두의 합이라고 하자. ζ가 A를 포함하지 않는 이론이라는 것은 분명하다. 우리는 그것이 프라임이라는 것을 보인다.

(모순을 일으키기 위해) $B \vee C \in \zeta$ 이고 $B, C \not\in \zeta$ 라고 하자. 그렇다면 $\zeta \cup B$ 와 $\zeta \cup C$ 로부터 얻어진 이론들은 모두 A를 포함해야한다. 이로부터 $\zeta' \wedge B \vdash_{LC} A$ 이고 $\zeta' \wedge C \vdash_{LC} A$ 인 ζ의 원소들의 연언 ζ'이 있다. (좀 더 정확히, $\zeta^1 \wedge B \vdash_{LC} A$ 이고 $\zeta^2 \wedge C \vdash_{LC} A$ 인 ζ^1, ζ^2 가 있고 ζ'은 ζ^1, ζ^2의 연언 즉 $\zeta^1 \wedge \zeta^2$ 이다.) $\vdash_{LC} A \rightarrow B$ 이면 $A \vdash_{LC} B$ 라는 데 주목하자. 그렇다면 A7과 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge B) \vee (\zeta' \wedge C) \vdash_{LC} A$ 를 얻는다. 그리고 접두화, A8, 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge (B \vee C)) \vdash_{LC} A$ 이다. 이로부터 $A \in \zeta$ 이고 이는 가정에 모순을 일으킨다.

유비적으로 ŁC에 관한 프라임 이론이 있다는 것을 증명할 수 있다. 단, ŁC의 연역정리에 있어서 $\vdash_{ŁC} A^n \rightarrow B$ 이면 $A \vdash_{ŁC} B$ 라는 데 주목할 필요가 있다. 위 증명과 관련하여 ŁC 경우 연역정리에 의해 $\vdash_{ŁC} (\zeta' \wedge B)^n \rightarrow A$, $\vdash_{ŁC} (\zeta' \wedge C)^m \rightarrow A$ 이다. 이때 A9에 의해 $\vdash_{ŁC} ((\zeta' \wedge B)^n \rightarrow A) \rightarrow ((\zeta' \wedge B) \rightarrow ((\zeta' \wedge B)^n \rightarrow A))$ 이기 때문에 긍정식에 의해 $\vdash_{ŁC} (\zeta' \wedge B) \rightarrow ((\zeta' \wedge B)^n \rightarrow A)$

이고, 나머지 정리(주 3 참조)를 이용해 $\vdash_{ŁC}$ $(\zeta'\wedge B)^{n+1}\rightarrow A$ 을 얻을 수 있다. 따라서 우리는 n, m 중 작은 수의 경우 그 숫자가 큰 수와 같아질 때까지 같은 방식으로 늘려갈 수 있다. 이는 우리가 n, m 중 큰 값을 공통의 값으로 한 즉 $\vdash_{ŁC}$ $(\zeta'\wedge B)^{\max(n,m)}\rightarrow A$, $\vdash_{ŁC}$ $(\zeta'\wedge C)^{\max(n,m)}\rightarrow A$ 을 얻을 수 있다는 것을 의미한다. 이제 $(A\vee B)^n\leftrightarrow(A^n\vee B^n)$, $(A\wedge B)^n\leftrightarrow(A^n\wedge B^n)$([6] 보조정리 2.2.24 참조)의 성질을 이용해서, 우리는 LC와 유사한 방식으로 모순을 이끌어낼 수 있다. □

따라서 [명제11]과 [명제13]에 의해 다음의 강한 완전성을 보일 수 있다.

[정리14] (강한(strong)) 완전성(completeness)

$\Gamma \vDash_{Ł(L)C} A$ 이면, $\Gamma \vdash_{Ł(L)C} A$ 이다.

[언급15] LC는 하이팅의 직관주의 명제 논리 IC에 A12을 덧붙여 얻은 체계이다. 따라서 루트리-마이어 의미론에 의한 LC의 완전성 증명 속에 IC의 완전성에 대한 증명이 포함되어 있다. 즉 LC를 위한 루트리-마이어 의미론에서 A12과 그에 상응하는 조건 p10에 대한 고려를 배제할 경우, IC를 위한 루트리-마이어 의미론을 제공한 것이 된다. 그러므로 루트리-마이어 의미론을 통해 우리는 LC의 완전성뿐만 아니라 IC의 완전성을 제공할 수 있다.

6. 의의 및 남은 과제

1장에서 지적한 것처럼 ŁC와 LC 각각의 함의는 실질 함의 역설을 일으키는 불합리성과 사소성 중 전자 경우는 양자 모두를 후자 경우는 사소성을 만족하지 않는다. 그 점에서 두 함의는 실질 함의의 역설을 (부분적으로) 극복할 수 있는 함의이다. 이 논문은 그러한 체계들에 관한 의미론을 제시한 글에 해당한다. 언급한 위의 두 조건 모두를 만족하지 않는다는 점

에서 LC에 비해 ŁC는 훨씬 더 연관 논리에 가깝다. 즉 ŁC는 긍정역설 정도를 받아들이는 연관 논리로 간주될 수 있다. 이 논문은 그러한 체계에 (연관 논리의 의미론으로 널리 알려진) 루트리-마이어 의미론을 제공한 글에 해당한다.

관계 의미론을 우카세비츠의 다치 체계들에 적용하여, (다치 논리와) 연관 논리와의 관련성을 밝히려는 시도가 얼크하르트(A. Urquhart)에게서 있었다. 그는 루트리-마이어와 유사한 의미론을 사용하여, ŁC에서 참인 문장이 순서 지어진 아벨리언 그룹 위의 모든 모델 구조에서 타당하다는 것을 보였다. 그리고 이를 통해 주어진 모델 이론에서 ŁC의 완전성을 보일 수 있다는 사실을 지적하였다.([11] 참조) 이 논문은 얼크하르트가 고찰하지 못한 루트리-마이어 의미론을 이용해서 그와 비슷한 작업을 한 글로 간주될 수 있고, 그 점에서 나름의 의의가 있다고 생각한다.

문제는 다양한 논리 체계의 완전성을 보일 수 있는 강력함에도 불구하고 (무한) 다치에 주로 사용되는 행렬 방법과 달리 루트리-마이어 의미론만 갖고서 그것이 다루는 논리가 무한 다치인지를 알기 어렵다는 것이다. 가령 행렬 방법을 도입할 경우 0, 1/2, 1을 원소로 하는 행렬은 (각각을 거짓, 중간 값, 참으로 하는) 3치를 논리를 나타내고, [0, 1]의 연속 값은 무한 다치라는 것을 쉽게 알 수 있으나 루트리-마이어 의미론은 그러한 행렬 내지 진리치를 갖지 않는다. 그러나 무한 다치가 진리치의 선형성에 바탕을 둔 행렬을 도입하듯이 무한 다치 체계에 관한 한 루트리-마이어 의미론 또한 정보 순서가 선형적인 프레임에 바탕을 둔 모델을 도입한다. (연관 논리를 위한 루트리-마이어 의미론은 일반적으로 부분순서 프레임에 바탕을 둔 모델로 충분하다.) 이러한 문맥에 기초해 두 의미론이 어떤 연관 관계에 있는 지가 앞으로 좀더 체계적으로 연구될 필요가 있다.8)

---

8) 연관 논리 **RM**에 관한 한 3치 크립키형 의미론의 모형 이론과 (무한 다치에 사용된) 수기하라 행렬(Sugihara matrices)을 이용한 모형 이론 사이에 연관성이 있다는 것이 이미 지적되었다.([2] §49.1.5 참조)

참고 문헌

[1] A. R. Anderson and N. D. Belnap, **Entailment: The Logic of Relevance and Necessity**, vol {1}, Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.

[2] A. R. Anderson, N. D. Belnap, and J. M. Dunn, Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, vol 2, Princeton, Princeton Univ. Press, 1992.

[3] J. M. Dunn, "Relevance logic and entailment'', Handbook of Philosophical Logic, vol III. D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1986, pp. 117-224.

[4] J. M Dunn, "Partiality and its Dual'', Studia Logica, 66 (2000), pp. 5-40.

[5] J. M Dunn and G. Hardegree, Algebraic Methods in Philosophical Logic, Oxford, Oxford Univ Press, 2001.

[6] P. Hájek., Metamathematics of Fuzzy Logic, Amsterdam, Kluwer, 1998.

[7] G. Restall, An Introduction to Substructural Logics, London, Routledge, 2000.

[8] R. Routley and R. K Meyer, "The semantics of entailment (II)'', Journal of Philosophical Logic, 1 (1972a), pp. 53-73.

[9] R. Routley and R. K Meyer, "The semantics of entailment (III)'', Journal of Philosophical Logic, 1 (1972b), pp. 192-208.

[10] R. Routley and R. K Meyer, "The semantics of entailment (I)'', Truth, Syntax, and Modality, H. Leblanc (ed.), Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1973, pp. 199-243.

[11] A. Urquhart, "Many-valued logic'', Handbook of Philosophical Logic, vol. III, pp. 71-116.

[12] E. Yang, "T-R, TE-R, TEc-R'', Bulletin of the Section of Logic, 31/3 (2002), pp. 171-181.