

E-체계들을 위한 루트리-마이어 의미론

양 은 석 (연세대)

【요약문】 이 논문에서 우리는 (축약 원리가 없는) 연관 체계 EW의 이웃 체계들을 다룬다. 구체적으로 우리는 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 E (Ee-W) 체계, 특수 주장 specialized assertion(sa) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsa) 체계, 자기 배분 self-distribution(sd) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsd) 체계, 그리고 체인chain(c) 원리와 축약 원리를 포함하는 Ee 체계들의 확장 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec를 다룬다. 우리는 루트리 마이어 의미론을 사용해서 이 체계들을 위한 완전성을 보인다.

【주제어】 축약원리, 연관체계, 루트리, 마이어

1. 들어가는 말

이 논문에서 우리는 확장expansion 공리를 갖는 E의 변형 체계들 특히 축약contraction (W) 공리를 포함하지 않는 E의 변형 체계들을 다룬다.1) 확장 원리는 다음의 두 가지 점에서 흥미롭다. 첫째, (자기-함의 self-implication와 함께) 확장 원리를 사용해서 혼합mingle 원리를 정리로 얻을 수 있다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 둘째, 확장 원리는 축약 원리의 정반대이다. 크립키[5]가 지적하듯이, "결정가능성 정리 decidability theorem"를 위한 "일반적 방법"은 "혼합 원리의 정반대의 출현에 의존한다". 이는 확장 원리가 결정가능성에 유용하고 중요한 원리라는 것을 의미한다.

구체적으로 우리는 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 E (Ee-W) 체계, 특수 주장specialized assertion(sa) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsa) 체계, 자기 배분self-distribution(sd) 원리를 포함

1) 우리는 이러한 체계들을 간단히 E-체계들로 명명한다. 특히 확장 원리를 포함하는 E-체계들을 Ee-체계들로, 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 체계들을 Ee-W 체계들로 명명한다.

70 논리연구 6집 2호

하지 않는 Ee-W (Ee-Wsd) 체계, 그리고 체인chain(c) 원리와 축약 원리를 포함하는 Ee 체계들의 확장 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec를 다룬다. 우리는 각 체계를 위한 루트리-마이어 의미론을 제시한다. 그리고 그것을 통해 각 체계의 완전성을 다룬다.

편의상 특별히 각 체계를 구별할 필요가 없다면 우리는 Ee(c-W) 체계들 더 간단히 Ee(c-W)에 의해 위에서 언급한 각 체계들을 함께 표현할 것이다. 그러나 문맥에 따라 독자는 어떤 체계를 의미하는 지를 충분히 알 수 있을 것이다. 또 Ee(-W)에 의해 체인 원리를 갖지 않는 Ee-W 체계들을 나타낼 것이다. 루트리-마이어[6, 7, 8]와 던[1, 2]에 의존해서 우리는 Ee-체계들을 위한 완전성을 줄 수 있다.

2. Ee(c-W)를 위한 공리 도식과 규칙들

편의상 우리는 이 절에서 Ee(c-W)를 위한 공리 도식과 추론 규칙만을 제시한다. 나머지 것들에 대해서는 통상의 기보법과 용어법을 따른다. Ee(c-W)는 다음의 공리 도식과 추론 규칙을 통해 형식화될 수 있다.

{공리도식1} Ee(c-W)의 공리 도식은 다음의 형식으로 주어진다:

- | | |
|---|-----------------|
| A1. $A \rightarrow A$ | (자기-함의) |
| A2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | (점미화) |
| A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$ | (점두화) |
| A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ | (확장) |
| A5. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | (자기배분) |
| A6. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A$ | (양상화) |
| A7. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ | (양상화) |
| A8. $A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$ | (\wedge -제거) |
| A9. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$ | (\wedge -도입) |
| A10. $A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$ | (\vee -도입) |
| A11. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$ | (\vee -제거) |

- A12. $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (배분)
 A13. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$, where $\Box A := (A \rightarrow A) \rightarrow A$
 A14. $\sim \sim A \rightarrow A$ (이중부정)
 A15. $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$ (대우)
 A16. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (축약)
 A17. $(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$ (귀류)
 A18. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (체인)

[추론규칙2] Ee(c-W)의 추론 규칙은 다음과 같다:

(MP) 긍정식: A와 $A \rightarrow B$ 로부터 B를 추론할 수 있다;

(AD) 선접: A와 B로부터 $A \wedge B$ 를 추론할 수 있다.

[정의3]

(df1) $A \circ B := \sim(A \rightarrow \sim B)$

[체계들4]

- Ee-Wsa: A1 - A6 + A8 - A15;
 Ee-Wsd: A1 - A4 + A7 - A15;
 Ee-W: Ee-Wsd + A5;
 Ee: Ee-W + A16, A17;
 Eec-Wsa: Ee-Wsa + A18;
 Eec-Wsd: Ee-Wsd + A18;
 Eec-W: Ee-W + A18;
 Eec: Ee + A18.;

3. Ee(c-W)를 위한 루트리-마이어 프레임과 모델

우리는 연관relevant 모델 구조를 루트리-마이어 프레임이라고 부른다. [1, 2, 4]을 따라서, 우리는 (루트리-마이어) 프레임을 정의한다. 프레임은

72 논리연구 6집 2호

다음 정의와 공준을 만족하는 (U, \sqsubseteq, R, Z) 이 좌 주장 프레임(left assertional frame²⁾)이고 * 가 U 위에서 일항 연산인 구조 $S = (U, \sqsubseteq, R, Z, *)$ 이다: ($\zeta \in U$)

- df2. $a \sqsubseteq \beta := \exists \zeta (R\zeta a \beta)$
 df3. $R2a\beta v \delta := \exists x (R a \beta x \ \& \ R x v \delta)$
 df4. $R2a(\beta v) \delta := \exists x (R a x \delta \ \& \ R \beta v x)$
 df5. $S a := \forall x, y (R a x y \Rightarrow \exists \zeta (R \zeta x y))$

(편의상 다음 공준들에 관한 한 어떤 ζ 를 표현하기 위해 루트리와 마이어가 그들 의미론에서 취한 0을 취한다. 우리가 어떤 ζ 를 표현하는 데 사용한 0은 Z 의 원소라는 데 주의하기 바란다.³⁾)

- p0. $R a \beta v$ 이고 $a' \sqsubseteq a$ 는 $R a' \beta v$ 를 함의한다. (단조성)
 p1. $R 0 a a$
 p2. $R 2 a \beta v \delta \Rightarrow R 2 \beta (a v) \delta$
 p3. $R 2 a \beta v \delta \Rightarrow R 2 a (\beta v) \delta$
 p4. $R a \beta v \Rightarrow \exists x (R x \beta a \ \& \ R a \beta v)$
 p5. $R 2 a \beta v \delta \ \& \ R \beta v \eta \Rightarrow \exists x (R a v x \ \& \ R x \eta \delta)$
 p6. $R a 0 a$
 p7. $\forall a \exists x (S x \ \& \ R a x a)$
 p8. $R a a a$
 p9. $R a \beta v \Rightarrow R a v * \beta *$

2) 즉 U 는 집합, $Z(\subseteq U)$ 는 다음 (*)를 만족하는 좌 하 동일성(left lower identity)($Z \circ A \subseteq A$),
 (*) $\exists \zeta, \in Z, R \zeta a \beta$ iff $a \sqsubseteq \beta$
 $R \subseteq U^3$, 그리고 \sqsubseteq 이 다음을 만족하는 부분-순서이다:
 $R a \beta v \ \& \ a' \sqsubseteq a$ 는 $R a' \beta v$ 를 함의한다,
 $R a \beta v \ \& \ \beta' \sqsubseteq \beta$ 는 $R a \beta' v$ 를 함의한다,
 $R a \beta v \ \& \ v' \sqsubseteq v$ 는 $R a \beta v'$ 를 함의한다.
 좌 주장 프레임에 대한 보다 자세한 이해를 위해서는 [4]를 참조.
 3) 특별히 구별할 필요가 없는 한 3.4, 3.5절의 증명에서 0에 의해 어떤 ζ 를 애매하게 나타낸다.

- p10. $a^{**} = a$
- p11. $Ra\beta\gamma \Rightarrow R2a\beta\beta\gamma$
- p12. Raa^*a
- p13. $R0a\beta$ or $R0\beta a$

Ee-Wsa를 위하여	df1 - df5 + p0 - p6, p8 - p10:
Ee-Wsd를 위하여	df1 - df5 + p0 - p4, p7 - p10:
Ee-W를 위하여	Ee-Wsd의 정의, 공준 + p5:
Ee를 위하여	Ee-W의 정의, 공준 + p12:
Eec-Wsa를 위하여	Ee-Wsa의 정의, 공준 + p13:
Eec-Wsd를 위하여	Ee-Wsd의 정의, 공준 + p13:
Eec-W를 위하여	Ee-W의 정의, 공준 + p13:
Eec를 위하여	Ee의 정의, 공준 + p13.

여기서 E를 위한 각각의 공준 즉 p1, p2, p3, p6 - p12 는 [1, 2, 7]에 있는 것들이라는 데 주의하기 바란다. p4, p5, p13은 각각 A4, A5, A18 을 위한 공준이며 [9, 10]에 나와 있다. [2, 4]을 따라 p0를 포함한다. Ee-(W) 체계들 즉 Ee-Wsa, Ee-Wsd, Ee-W, Ee 에 관한 한 \subseteq 은 U 위에서 부분 순서이고, Eec-(W) 체계들 즉 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec에 관한 한 선형 순서이다. 던과 하디그리의 (3, 4)를 따라, 우리는 U를 "정보 상태들"의 집합으로 간주한다. $a, \beta \in U$ 에 대하여, $a \subseteq \beta$ 는 a의 정보가 β 의 정보에 포함된다는 것을 의미한다.⁴⁾

Ee(c-W)를 위한 모델에 의해, 우리는 $(U, \subseteq, R, Z, *)$ 가 프레임이고 \models 이 다음 조건을 만족하는 U로부터 Ee(c-W)로의 관계인 구조 $M, = (U, \subseteq, R, Z, *, \models)$,을 의미한다.

- (AHC) (명제 변항 p에 대하여) $a \models p$ 이고 $a \subseteq \beta$ 이면, $\beta \models p$;
- (EC) 식 A, B 에 대하여,

4) \subseteq 이 정보 순서이기 때문에 공준 p1을 생략할 수 있다는 데 유의하기 바란다.

74 논리연구 6집 2호

- (\wedge) $a \models A \wedge B \Leftrightarrow a \models A$ 그리고 $a \models B$;
- (\vee) $a \models A \vee B \Leftrightarrow a \models A$ 또는 $a \models B$;
- (\rightarrow) $a \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \beta, v \supseteq a$ ($Ra\beta v$ 이고 $\beta \models A$ 이면, $\beta \models B$):
- (\sim) $a \models \sim A \Leftrightarrow a^* \not\models A$.

$a \models A$ 인 경우에 식 A 가 U 의 a 에서 v 위에서 참이다. ζ (특히 0), $\in Z$, $\models A$ 인 경우에 A 는 M 위에서 입증된다verified. U 에 속하는 모든 x 에 대해 만약 $x \models A$ 라면 $x \models B$ 일 경우, A 는 M 위에서 B 를 함축한다entails. 모든 모델에서 A 가 B 를 함축할 경우, A 는 B 를 $Ee(c-W)$ -함축한다. A 가 프레임 S 안의 모든 진리치에서 입증될 경우, A 는 S 에서 $Ee(c-W)$ -타당하다valid. Σ 를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장 A 가 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것 기호로 $\models Ee(c-W) A$ 는 모든 S ($\in \Sigma$)에 대하여, A 가 S 에서 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것과 동치iff이다.

4. $Ee(c-W)$ 의 건전성

[1, 2]를 따라 우리는 $Ee(c-W)$ 를 위한 건전성을 보인다. 이를 증명하기 위해 우리는 아래 입증 보조정리Verification Lemma를 필요로 한다. 먼저 A 위에서 귀납에 의해 우리는 쉽게 다음을 증명할 수 있다.

[보조정리5] 세습Hereditary 조건(HC)

임의의 식 A 에 대하여, $a \models A$ 이고 $a \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \models A$.

연결사 $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ 에 관한 한 [1, 2, 8]에서와 같은 진리치를 갖기 때문에, 우리는 거기서의 입증 보조정리를 사용할 수 있다.

[보조정리6] 입증Verification 보조정리

v 위에서 A 가 B 를 함축한다면 $A \rightarrow B$ 는 입증된다. 즉 v 위 ζ ($\in Z$)에서 참이다. 따라서 주어진 모델 $M, = (U, \sqsubseteq, R, Z, *, \models)$ 에서 B 를 함

축한다면 $A \rightarrow B$ 는 그 모델에서 $Ee(c-W)$ -타당하다 valid. 즉 모든 $x (\in U)$ 에 대해 만약 $x \models A$ 라면 $x \models B$ 일 경우, $\models A \rightarrow B$ 이다. 그리고 A 가 B 를 $Ee(c-W)$ -함축한다면, $A \rightarrow B$ 는 $Ee(c-W)$ -타당하다.

증명: [8]에 있는 보조정리 2, 3과 정의에 의해. ([보조정리5]를 사용해서, 우리는 이것을 또한 증명할 수 있다. [1, 2]을 보라.) \square

$\vdash Ee(c-W) A$ 를 $Ee(c-W)$ 에서 A 의 정리인 것이라고 하자. 위에서 진술한 각각의 공준이 [1, 2, 7, 8, 9, 10]에서 이미 사용되었기 때문에, $Ee(c-W)$ 를 위한 건전성은 즉각 따라 나온다.

[정리7] (약한weak) 건전성soundness

$\vdash Ee(c-W) A$ 이면, $\models Ee(c-W) A$ 이다.

증명: 우리는 공리 도식 $A5$ 의 사례들이 모든 프레임에서 타당하다는 즉 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것만을 증명한다. $A5$ 를 위해 [보조정리6]에 의해 $p5$ 가 타당하고 holds $a \models A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 라는 것을 가정하고서 $a \models (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 임을 보이는 것으로 충분하다. 후자를 보이기 위해 우리는 $Ra\beta v$ 와 $\beta \models A \rightarrow B$ 를 가정하고서 $v \models A \rightarrow C$ 를 보인다. 따라서 우리는 다시 $Rv\delta \eta, \delta \models A, R\beta\delta v$ 를 가정하고서 $Ra\delta x$ 와 $Rx\eta$ 이고 따라서 $\eta \models C$ 인 x 가 있다는 것을 보인다. df3에 의해 $R2a\beta\delta\eta$ 이고 가정 $\beta \models A \rightarrow B, \delta \models A, R\beta\delta v$ 와 (\rightarrow) 에 의해 $v \models B$ 이다. (\rightarrow) 을 사용해서 위 가정들로부터 $x \models B \rightarrow C$ 이다. 이로부터 $Ra\delta x$ 와 $Rx\eta$ 라는 것을 얻는다. 따라서 $\eta \models C$ 라는 것을 얻는다.

다른 공리 도식들의 사례들에 관한 한 다음을 주지하는 것으로 충분하다. [8]의 [보조정리4]에 의해 연언, 선언, 부정의 공리 도식들 $A8 - A12, A14, A15$ 의 사례들이 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것이 따라 나온다. [7]의 [보조정리5]에 의해 $A1 - A3, A6, A16$ 의 사례들이 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것이 따라 나온다. [1]의 §48.6의 내용들로부터 $A7, A13, A17$ 의 사례들이 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것이 따라 나온다. [9]의 [명제1]로부터 $A4, A18$

의 사례들이 $Ee(c-W)$ -타당하다는 것이 따라 나온다.

[9]의 [명제1]로부터 긍정식, 선접 규칙이 $Ee(c-W)$ -타당성을 보존한다는 것이 따라 나온다. □

5. $Ee(c-W)$ 의 완전성

우리는 양상 논리의 (단 극대 이론 maximal theories 대신 프라임 이론 prime theories을 갖는) 헨킨 식 증명을 사용해 $Ee(c-W)$ 를 위한 완전성을 보인다. 이를 위해 몇몇 이론을 정의한다. 먼저 $\vdash Ee(c-W)$ 를 논리 $Ee(c-W)$ 의 연역적 귀결 관계로 해석한다. $Ee(c-W)$ -이론 $Ee(c-W)$ -theory에 의해 우리는 연역성 즉 긍정식과 선접 아래 닫힌 문장들의 집합 T 를 의미한다. 프라임 $Ee(c-W)$ -이론 prime $Ee(c-W)$ -theory에 의해 $A \vee B \in T$ 이면, $A \in T$ 이거나 $B \in T$ 인 이론을 의미한다. 사소한 $Ee(c-W)$ -이론 trivial $Ee(c-W)$ -theory에 의해 $Ee(c-W)$ 의 문장들의 전 집합을 의미한다. 단이 [3]의 [주의4]에서 진술하듯이, 우리는 $Ee(c-W)$ -이론 T 가 $Ee(c-W)$ 의 모든 정리를 포함한다는 것에 주목한다. 따라서 그것은 연관 논리 저서에서 (정리를 포함하는) "정규 이론 regular theory"이라고 부르는 것이다. 즉 $Ee(c-W)$ -이론에 의해 우리는 정규 $Ee(c-W)$ -이론을 의미한다. 이것은 또한 T 가 공집합일 수 없다는 것을 의미한다. 아래의 결과에 의해 T 는 또한 사소한 이론일 수 없다. 따라서 우리는 " $Ee(c-W)$ -이론"에 의해 사소하지 않은 이론을 또한 의미한다.

이제 우리는 표준 $Ee(c-W)$ -프레임 canonical $Ee(c-W)$ -frame이 \sqsubseteq_{can} 이 U_{can} 위에서 정보 순서이고, Z_{can} 이 임의의 프라임 $Ee(c-W)$ 이론 즉 ζ_{can} 의 집합이고, $Z_{can} \subseteq U_{can}$ 이고, U_{can} 이 ζ_{can} 을 확장하는 프라임 $Ee(c-W)$ -이론들의 집합이라고 하고, R_{can} 이 U_{can} 에 제약된 아래의 R 이고

(1) $Ra\beta\gamma$ 는 $Ee(c-W)$ 의 임의의 식 A, B 에 대하여 $A \rightarrow B \in a$ 이고 $A \in \beta$ 이면 $B \in \gamma$ 이다와 동치이다,

*can이 Ucan에 제약된 *인 구조 $S = (Ucan, \sqsubseteq can, Rcan, Zcan, *can)$ 라고 하자. 우리는 $Ee(c-W)$ 의 각각의 공리 도식에 대하여 그에 상응하는 의미론적 공준이 타당할 경우 프레임이 $Ee(c-W)$ 에 적합fitting하다고 한다. a 가 프라임 이론인 데서 a^* 가 $\sim A$ 가 a 에 속하지 않는 즉 $a^* = \{A: \sim A \notin a\}$ 인 모든 식 A 의 집합이라고 하자.

위에서 언급한 것처럼 우리는 헨킨 식 완전성 증명으로부터 증명의 아이디어를 얻는다. 따라서 기초 $\{can$ 이 $Ee(c-W)$ 의 정리가 아닌 것들을 배제하는 즉 $\not\vdash Ee(c-W) A$ 인 A 들을 배제하는 프라임 $Ee(c-W)$ -이론으로 구성된다는 데 주목한다. 문맥상 우리가 의도한 것이 분명할 경우 0 즉 $0can$ 에 의해 (0 뿐만 아니라) $\{can$ 을 표현한다는 데 또한 주목한다. 표준 $Ee(c-W)$ -프레임의 부분 순서와 선형 순서는 Ucan에 제약된 \sqsubseteq 에 의존한다. 그렇다면 우선 다음은 분명하다.

[명제8] 표준 $Ee(c-W)$ -프레임은 부분적으로 순서 지어진다.

[명제9] 표준 $Ee(c-W)$ -프레임은 연관된다 즉 선형적으로 순서 지어진다.

증명: [9]의 [명제3]에 의해. □

[정리10] 표준적으로 정의된 $Ee(c-W)$ -프레임은 $Ee(c-W)$ 에 적합한 프레임이다.

증명: 우리는 $p5$ 가 타당하다holds는 것을 예로서 증명한다. (다른 공준들에 대해서는 [1]의 §48.3의 [정리1]과 §48.6, [7]의 [보조정리6], [8]의 [보조정리13], 그리고 [9]의 [명제4]를 지적하는 것으로 충분하다.)

$p5$ 를 위하여 우리는 $R2a\beta v\delta$ 즉 $Ra\beta x$ 이고 $Rxv\delta$ 인 x 가 있고 $R\beta v\eta$ 라는 것을 가정한다. 우리는 $Ravx$ 이고 $Rx\eta\delta$ 인 프라임 이론 x 가 있다는 것을 보일 필요가 있다. $x_0 = \{B: \exists A(A \rightarrow B \in a \ \& \ A \in v)\}$ 를 고려하자. x_0 의 정의는 $Ravx_0$ 를 보증한다.

78 논리연구 6집 2호

x_0 가 이론이라는 데 주목하자. 먼저 단지 이행성transitivity에 불과하기 때문에 x_0 가 함의 하에 닫혀있다는 것은 분명하다 ((1)의 1-2를 제외한 [사실1]이 $Ee(c-W)$ 의 정리라는데 주목하라). 그것은 또한 선접하에 닫혀있다. $A \rightarrow B, A' \rightarrow B' \in a$ 이고 $A, A' \in v$ 에 의하여 $B, B' \in x_0$ 라고 하자. 그렇다면 $A \wedge A' \in v, B \wedge B' \in x_0$ 이기 때문에 (1)의 [사실1-5]에 의해 $A \wedge A' \rightarrow B \wedge B' \in a$ 이다.

다음으로 우리는 $Rx_0\delta\eta$ 를 입증한다. $A \rightarrow B \in x_0, A \in v$ 라고 하자. 먼저 가정과 x_0 의 정의에 의해 $C \rightarrow (A \rightarrow B) \in a$ 인 C 가 있다. 그렇다면 A5에 의해 $(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B) \in a$ 이고, $R\beta v\eta$ 에 의해 $C \rightarrow A \in \beta$ 이다. 따라서 $C \rightarrow B \in x$ 이고 이로 인해 우리가 원하던 대로 $B \in \delta$ 이다. (1)의 Squeeze 보조정리에 의해 x_0 는 프라임 이론일 수 있다. 그러므로 p5를 만족하는 프라임 이론이 있다. □

다음으로 우리는 $S, = (Ucan, \sqsubseteq can, Rcan, Zcan, *can)$, 위에서 적절한 관계 \models 을 정의할 필요가 있다. 우리는 그것을 다음으로 정의한다.

$$a \models A \text{ iff } A \in a$$

하지만 이것이 위의 AHC와 EC를 만족한다는 것을 입증할 필요가 있다. $Ee(c-W)$ 의 긍정 부분이 (1) §42.1의 [정의1]을 만족하기 때문에 우리는 $R+$ 를 위해 고려되는 §48.3의 [사실1], [사실2]를 직접 사용할 수 있고 따라서 같은 부분의 [정리2]를 사용할 수 있다.

[명제11] 표준적으로 정의된 $(Ucan, \sqsubseteq can, Rcan, Zcan, *can \models)$ 은 $Ee(c-W)$ -모델이다.

증명: (9)의 [명제5]에 의하여. □

따라서 $(Ucan, \sqsubseteq can, Rcan, Zcan, *can \models)$ 은 $Ee(c-W)$ 모델이다. 그러므로 헨킨 식 구성에 의해 0 이 우리가 선택한 정리가 아닌 A 를 배제하

고 \models 의 표준적 정의가 속함membership과 일치하기 때문에, 우리는 각각의 $Ee(c-W)$ 의 정리가 아닌 A 에 대하여 A 가 $0 \neq A$ 인 $Ee(c-W)$ 모델 A 가 있다고 할 수 있다. 이는 우리가 다음과 같은 $Ee(c-W)$ 를 위한 (약한) 완전성(weak) completeness을 얻도록 한다.

[정리12] (약한weak) 완전성completeness
 $\models Ee(c-W) A$ 이면, $\vdash Ee(c-W) A$ 이다.

다음으로 $Ee(c-W)$ 를 위한 강한 완전성strong completeness을 증명해보자. 우리는 A 가 식들의 집합 Γ 의 $Ee(c-W)$ 귀결을 다음과 동치인 것으로 정의한다: 모든 $Ee(c-W)$ 모델에 대하여, 모든 $B \in \Gamma$ 에 대해 $a \models B$ 일 때마다 (0 뿐만 아니라) 모든 $a \in U$ 에 대해 $a \models A$ 이다. 우리는 A 가 Γ 로부터 $Ee(c-W)$ -연역될 수 있다deducible는 것이 A 가 Γ 를 포함하는 모든 이론에 속하는 것을 의미하는 것으로 정의한다. 그렇다면,

[명제13] $\Gamma \not\models Ee(c-W) A$ 이면, $\Gamma \subseteq \zeta$ 이고 $A \notin \zeta$ 인 프라임 이론 ζ 가 있다.

증명: $Ee(c-W)$ 의 정합식들의 열거 $\{A_n : n \in \omega\}$ 를 취하자. 우리는 집합들의 열을 귀납에 의해 다음처럼 정의한다:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \{A' : \Gamma \vdash Ee(c-W) A'\} \\ \zeta_{i+1} &= Th(\zeta_i \cup \{A_{i+1}\}) \quad \zeta_i, A_{i+1} \vdash Ee(c-W) A \text{ 가 아닐 경우} \\ &\quad \zeta_i \quad \quad \quad \text{그 외} \end{aligned}$$

이제 ζ 를 이러한 ζ_n 들 모두의 합이라고 하자. ζ 가 A 를 포함하지 않는 이론이라는 것은 분명하다. 우리는 그것이 프라임이라는 것을 보인다.

(모순을 일으키기 위해) $B \vee C \in \zeta$ 이고 $B, C \notin \zeta$ 라고 하자. 그렇다면 $\zeta \cup B$ 와 $\zeta \cup C$ 로부터 얻어진 이론들은 모두 A 를 포함해야한다. 이로부터 $\zeta' \wedge B \vdash Ee(c-W) A$ 이고 $\zeta' \wedge C \vdash Ee(c-W) A$ 인 ζ' 의 원소들의 연언

ζ' 이 있다. (좀더 정확히, $\zeta_1 \wedge B \vdash Ee(c-W) A$ 이고 $\zeta_2 \wedge C \vdash Ee(c-W) A$ 인 ζ_1, ζ_2 가 있고 ζ' 은 ζ_1, ζ_2 의 연언 즉 $\zeta_1 \wedge \zeta_2$ 이다.) $\vdash Ee(c-W) A \rightarrow B$ 이면 $A \vdash Ee(c-W) B$ 라는 데 주목하자. 그렇다면 A8과 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge B) \vee (\zeta' \wedge C) \vdash Ee(c-W) A$ 를 얻는다. 그리고 A3, A12, 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge (B \vee C)) \vdash Ee(c-W) A$ 이다. 이로부터 $A \in \zeta$ 이고 이는 가정에 모순을 일으킨다. \square

따라서 [명제11]과 [명제13]에 의해 다음의 강한 완전성을 보일 수 있다.

[정리14] (강한strong) 완전성completeness

$\Gamma \vDash Ee(c-W) A$ 이면, $\Gamma \vdash Ee(c-W) A$ 이다.

참고문헌

- [1] A. R. Anderson, N. D. Belnap, and J. M. Dunn, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol {2}, Princeton, Princeton Univ. Press, 1992.
- [2] J. M. Dunn, "Relevance logic and entailment", *Handbook of Philosophical Logic*, D. Gabbay and F. Guentner (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1986, pp. 117-224.
- [3] J. M. Dunn, "Partiality and its Dual", *Studia Logica*, 66 (2000), pp. 5-40.
- [4] J. M. Dunn and G. Hardegree, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford, Oxford Univ Press, 2001.
- [5] S. Kripke, "A completeness theorem in modal logic", *Journal of Symbolic Logic*, 24, (1959) pp. 1-15.

- [6] R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (II)", *Journal of Philosophical Logic*, 1 (1972a), pp. 53-73.
- [7] R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (III)", *Journal of Philosophical Logic*, 1 (1972b), pp. 192-208.
- [8] R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (I)", *Truth, Syntax, and Modality*, H. Lebranc (ed.), Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1973, pp. 199-243.
- [9] E. Yang, "T-R, TE-R, TEc-R'", *Bulletin of the Section of Logic*, 31/3 (2002), pp. 171-181.
- [10] E. Yang, "Routley-Meyer semantics for the weak Boolean Logic wB-SC and a Translation", manuscript (200+).

Institute of Yonsei Philosophy

Yonsei University, Rm 523

Inmun-gwan, seodaemun, seoul, 20-789, KOREA,

Email: yanges2@hanmail.net}