연관relevant논리와 다치논리의 관계 연구
: BNc$_1$과 LŁC$^+$의 구문론적 관계 연구

양 은 석 (연세철학연구소)

【요약문】 이 글에서 우리는 연관 명제계산과 무한다치 명제계산 사이의 관계를 살핀다. 구체적으로 우리는 연관 명제계산 BNc$_1$이 무한다치 명제계산 LŁC를 포함하는 확장 체계로 간주될 수 있다는 것을 보인다. 즉 LŁC에 직관주의 명제논리에 사용된 부정을 첨가한 후, BNc$_1$이 이 체계 LŁC$^+$로 번역될 수 있다는 것을 보인다.

【주요어】 연관논리, 다치논리, BNc$_1$, LŁC, LŁC$^+$, 번역.

1. 들어가는 말

지난 30여 년 간 다치논리와 연관논리를 관련짓는 연구가 어느 정도 진척되었다. 먼저, 잘 알려진 연관논리를 위한 4치 의미론four-valued semantics 연구를 들 수 있다. 이는 던Dunn [8, 11], 던/빔보Bimbo [4], 벨납Belnap [2, 3], 레스탈Restall [19] 등에 의해 진행되었다. 둘째로, 던(/마이어Meyer) [10, 12]에 의해서 연관 명제계산propositional calculus R-mingle(RM)이 더밋의 무한 다치 명제계산(LC)을 포함하는 체계super system에 상응한다는 것이 밝혀졌다. 이 글에서 우리는 다른 연관 명제계산과 무한 다치 명제계산 사이의 관계를 살핀다.

연관 명제계산 중 구성할 수 있는 거짓constructable falsity 계산 N이 1949년 넬슨Nelson [17]에 의해 제시되었다. 직관주의 명제계산 H에서 부정 공리들negation axioms을 빼고 대신 부정함의negated implication, 부정부정negated negation, 모호성absurdity, 드 모르강 규칙을 첨가함으로써, 우리는 N 체계를 얻을 수 있다. 이 체계에서 다시 모호성 규칙을 뺄 경우, 우리는 N$^-$을 얻게 된다. 이는 1984년 알무크다드/넬슨Almukdad & Nelson [1]에 의해 연구되었고, 2000년 던 [11]에 의해 연구된 L 논리 중 BN$_1$과 같다. 거기에 체인chain 규칙을 덧붙일 경우, 같은 글에서 던에 의해 다뤄진 BNc$_1$이 된다.

반면 무한 다치 명제계산과 관련하여 1969년 레셔Resher [18]에 의해 LŁC 체계가 구상되었다. 이는 부정negation에 관한 한 루카치비치 무한 다치 명제계산

(ŁC)의 진리치evaluations를, 함의implication에 관한 한 더밋의 LC의 진리치를 따르는 체계이다. 비록 LŁC 자체는 아닐지라도 그것의 모든 정상 확장normal extensions이 완전할 수 있다는 것이 양은석 [22]에 의해 보여졌다.

이 글에서 우리는 연관 명제계산 BNc_1이 무한 다치 명제계산 LŁC를 포함하는 확장 체계로 간주될 수 있다는 것을. 즉 LŁC에 직관주의 명제논리에 사용된 부정을 첨가한 후, BNc_1이 이 체계로 변역될 수 있다는 것을 보인다. 우리는 그러한 부정을 가-부정pseudo-negation이라 부르고 가-부정을 포함한 LŁC를 LŁC$^+$로 명명할 것이다.

2. LŁC와 LŁC$^+$

다른 글([22])에서 LŁC의 모든 정상확장의 완전성이 이미 증명되었기 때문에 여기서는 우리 목적에 필요한 최소한의 논의만 수행한다. 즉 우리는 단지 LŁC (혹 LŁC$^+$)를 위한 진리표tables for evaluations, 공리도식axiom schemata, 추론규칙rules of inference 정도만 제시한다.[1] LŁC를 위한 진리치evaluation는 다음 표에 의해 L(, →, ∧, ∨, p_0, p_1, ...)의 모든 잘 정식화된 식들well-formed formulas로 확장되는 함수 v: PA → [0, 1] 이다. (PA: 명제 변항들의 집합, [0, 1]: 0과 1 사이의 유리수)

<TABLES>

1. v(P) = 1 - v(P),
2. v(P→Q) = 1 if v(P) ≤ v(Q)
   v(Q) otherwise,
3. v(P∧Q) = min(v(P), v(Q)),
4. v(P∨Q) = max(v(P), v(Q)).

<AXIOM SCHEMATA>

A1. A→(B→A) (positive paradox)
A2. (A→(B→C))→((A→B)→(A→C)) (self-distribution)
A3. (A∧B)→A / (A∧B)→B (∧-elimination)

1) 기호 사용과 관련해 나머지 것들에 대해서 우리는 통상적인 기보법notation과 용어법terminology을 따른다. LŁC의 (모든 정상확장의) 완전성과 관련된 자세한 논의를 위해선 양은석 [22]을 참조.

A4. ((A→B)∧(A→C))→(A→(B∧C)) (∧-introduction)
A5. A→(A∨B) / B→(A∨B) (∨-introduction)
A6. ((A→C)∧(B→C))⊃((A∨B)→C) (∨-elimination)
A7. (A→B)∨(B→A) (chain)
A8. A→ A / A→A (double negation)
A9. (A∨B)→ A∧ B / A∧ B→ (A∨B) (negated disjunction)

<RULES>
MP (modus ponens)
AD (adjunction)

(df1) P∨Q := ((P→Q)→Q)∧((Q→P)→P),
(df2) 0 := 1,
(df3) P↔Q := (P→Q)∧(Q→P).

df1, df2**에 의해 원초적 기호**primitives**를** , →, ∧, 1**로 줄일 수 있고** df3**에 의해** A8, A9**를 다음으로 표현할 수 있다**.

A8‘. A ↔ A,
A9‘. (A∨B) ↔ A∧ B.

¬, **F** **를 각각 가-부정과 항위 문장**a constant false sentence**이라고 하자**. **직관주의 명제논리를 좇아**

(df4) ¬P := P⊃**F**

라고 정의하자. LŁC**에 다음 공리를 추가할 경우**, **우리는** LŁC+ **체계를 얻는다**.

A10. (A→¬B) ↔ (B→¬A) (contraposition)
A11. ¬(A→A) → B

3. BN_1과 BNc_1

1장에서 언급한 대로 BN_1과 BNc_1의 완전성은 던 [11]에 의해 증명되었다. 그러나 그것들은 L 체계들이라는 이름 하에 보다 일반적인 형태로 다루어졌다.2) 여기서 우리는 BN_1, BNc_1의 두 체계에 한정해서 논의를 전개함으로써 두 체계가 어떻게 완전할 수 있는 지를 좀더 분명히 한다.

3.1. 예비적 논의

여기서는 BN_1, BNc_1의 의미론 이해를 위한 예비적 논의를 수행한다. 구체적으로 우리는 **Dunn** 행렬matrix과 4치 귀결four-valued consequence을 다룬다. 먼저, 던 [6, 8, 9, 10, 11]에 따라 우리는 *진리치evaluation*를 문장들로부터 진리 값을 갖지 않는 공집합과 참, 거짓을 함께 취하는 집합을 포함하는 2치 집합으로의 함수로 정의한다.

[5, 7, 10, 11]에서 던은 4치 행렬을 속lattice으로 다뤘고 그것을 **lattice 4**라고 불렀다. 그리고 진리 값 집합 { }, {0}, {1}, {0, 1}을 각각 **N**, **F**, **T**, **B**로 표현했다.3) 이것을 우리는 다시 4치 행렬로 고려한다. 그리고 그것을 Dunn 행렬이라고 부른다.4) —, →, ∧, ∨의 행렬은 다음으로 정의된다.5)

---

2) 다양한 체계의 공리화와 관련해서는 Dunn [11], 28-30쪽을 참조.

3) 파인Fine [14]는 **N**과 **B**의 경우를 위해 각각 불충분결정underdetermination과 초과결정overdetermination을 묘사하는 “gaps"와 ”gluts"란 용어법을 도입한다.

4) 필자가 알고 있는 한 **lattice 4**는 던에 의해 처음으로 또 지속적으로 연구되었다. 이 점을 강조하기 위해 우리는 **lattice 4** 대신 **Dunn** 행렬이란 표현을 사용한다.

5) —, ∧, ∨에 대한 우리 정의는 1, 2, 3, 4 대신 **T**, **N**, **B**, **F**를 사용한 [7]에서의 , &, ∨ 정의와 같다. [7], 15.3절과 24.4.1절을 보라.

—	
T	F
N	N
B	B
F	T

→	T	N	B	F
T	T	N	B	F
N	T	T	F	F
B	T	F	T	F
F	T	T	T	T

∧	T	N	B	F
T	T	N	B	F
N	N	N	F	F
B	B	F	B	F
F	F	F	F	F

∨	T	N	B	F
T	T	T	T	T
N	T	N	T	N
B	T	T	B	B
F	T	N	B	F

여기서 우리는 —, →, ∧, ∨가 애매하게 문장 연결사로도 사용된다는 데 주의할 필요가 있다. 양자의 구분은 논의 문맥에 의해 분명하게 될 것이다.

던 [11]과 유사하게 우리는 진리치를 정의한다. **Dunn**에서 *진리치*는 문장들로부터 **Dunn**으로 가는 함수이다. *함수 진리치functional evaluation*에 대해 우리는 0, 1이 모두 v(A)에 속하는 경우(both 0, 1 ∈ v(A))를 갖지 않는다. *전 진리치 total evaluation*에 대해 우리는 0, 1 중 적어도 하나는 v(A)에 속하는 경우(0, 1 ∈ v(A))를 갖는다. 1 ∈ v(A) 를 $\Vdash^{v}_{1}$ A 로, 0 ∈ v(A) 를 $\Vdash^{v}_{0}$ A 로 쓴다. 그리고 양상논리와 유사하게 v(A, α) 를 α $\Vdash^{v}_{1}$ A, α $\Vdash^{v}_{0}$ A 로 해서 진리치를 매개화한다parameterize. 단, 이때 α를 "가능 세계"보다는 "정보 상태information state"로 간주한다. 이제 우리는 귀결 관계를 다음으로 정의한다.

[정의3.1.1] (던 [11]) 4치 귀결 관계consequence relations

(1) A $\models^{BN}_{1}$ B 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{1}$ A 이면 $\Vdash^{v}_{1}$ A 이다와 동치iff이다;

(2) A $\models^{BN}_{0}$ B 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{0}$ A 이면 $\Vdash^{v}_{0}$ A 이다와 동치iff이다;

(3) A $\models^{BN}_{1,0}$ B 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{1,0}$A 이면 $\Vdash^{v}_{1,0}$A 이다와 동치iff이다.

(1)은 진리 보존truth-preserving 귀결을, (2)는 거짓 보존 귀결을, 그리고 (3)은 (1), (2) 모두를 나타낸다. 윗첨자 BN은 우리가 **Dunn** 행렬에 진리치를 부여하고 **N**과 **B**의 경우를 갖는다는 것을 분명히 한다.

[명제3.1.2] (던 [11]) 위 귀결 개념들은 모두 동치equivalent이다.

Dunn 행렬과 마찬가지로 **T**나 **N**을 중간 값으로 갖는 3치의 던 행렬 $\mathbf{D}_3$ 을 정의할 수 있다. 우리는 $\mathbf{D}_{3L}$ 로 {**T**, **N**, **F**}의 경우를, $\mathbf{D}_{3R}$ 로 {**T**, **B**, **F**}의 경우를 나타낸다. [정의3.1.1]에서의 진리치를 함수 진리치로 제한함으로써 귀결 관계 $\models^{N}_{1}$, $\models^{N}_{0}$, $\models^{N}_{1,0}$ 을, 전 진리치로 제한함으로써 귀결 관계 $\models^{B}_{1}$, $\models^{B}_{0}$, $\models^{B}_{1,0}$ 을 정의할 수 있다. 나아가 이를 바탕으로 연관논리 R의 "1단계 연관함의first degree entailments"를 위한 체계 구성을 할 수 있고 또 그것의 완전성을 보일 수 있다 (던 [11], 4장).

3.2. BN_1과 BNc_1을 위한 공리화

2장의 논의와 유사한 이유로 여기서 우리는 단지 BN_1과 BNc_1을 위한 공리도식과 추론규칙만 제시한다.

<AXIOM SCHEMATA>

I.	$A\rightarrow(B\rightarrow A)$	(positive paradox)
II.	$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	(self-distribution)
III.	$(A\wedge B)\rightarrow A$ / $(A\wedge B)\rightarrow B$	($\wedge$-elimination)
IV.	$((A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(B\wedge C))$	($\wedge$-introduction)
V.	$A\rightarrow(A\vee B)$ / $B\rightarrow(A\vee B)$	($\vee$-introduction)
VI.	$((A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C))\supset((A\vee B)\rightarrow C)$	($\vee$-elimination)
VII.	$(A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)$	(chain)
VIII.	$A \leftrightarrow -\!-A$	(negated negation)
IX.	$-(A\vee B) \leftrightarrow (-A\wedge -B)$[6]	(negated disjunction)
X.	$-(A\wedge B) \leftrightarrow (-A\vee -B)$	(negated conjunction)
XI.	$-(A\rightarrow B) \leftrightarrow (A\wedge -B)$	(negated implication)

<RULES>

MP	(modus ponens)
AD	(adjunction)

6) $\leftrightarrow$ 은 잎서의 정의 (df3)과 같다.

체계 (추론규칙 +)
BN_1: 공리 I - VI + VIII - XII,
BNc_1: BN_1 + VII.

3.3. 일반화된 Kripke 의미론

잘 알려진 대로 하이팅Heyting 직관주의 논리 H를 위한 의미론이 크립키 [16]에 의해 제시되었다. 그는 우리가 여기서 “정보 순서information order”로 간주하는 2항 접근가능성 관계binary accessibility relation $\sqsubseteq$를 사용하였다. 관련하여 토마슨Thomason [21]은 **B**(gluts)의 진리 값을 허용함으로써 크립키 의미론을 일반화하였다. 이의 연장선상에서 슬래니Slaney/슈렌동크Surendonkz/절Girle [20]에 의해 **B**와 **N**의 진리 값을 허용하는 체계 BN의 의미론이 연구되었고, 던 [11]은 이를 (다른 것들과 함께) BN_1과 BNc_1의 경우로까지 일반화해서 다루었다. 우리는 다른 체계를 제외한 BN_1, BNc_1 만을 집중적으로 다룬다.

*프레임frame*은 $\zeta \in U$ 와 $\sqsubseteq$이 U 위에서 *부분 순서*partial order인 구조 $S = (\zeta, U, \sqsubseteq)$ 이다. 던 [11]에 따라 우리는 U를 “정보 상태”의 집합으로 간주한다. $\alpha \sqsubseteq \beta$, $\alpha, \beta \in U$, 는 α의 정보가 β 정보에 포함된다는 것을 의미한다. Σ에 의해 우리는 모든 프레임들의 집합을 지시한다.

우리는 가부번의denumerably many 원자문장들이 있다는 것과 문장 **Sentences** 집합이 통상적인 방법에 의해 연결사 —, →, ∧, ∨로부터 귀납적으로 정의된다는 것을 가정한다. (매개된parameterized) BN_1-진리치 BN_1-evaluation는 아래 조건 하에 있는 문장 × U 로부터 **Dunn**, $\mathbf{D}_{3L} \times \mathbf{D}_{3L}$, 으로의 함수 $v(A, \alpha)$ 이다. $\mathbf{Val}_{BN1}$ 에 의해 우리는 이러한 진리치들의 집합을 지시한다. 그리고 $v(A, \alpha) = 1$ 을 $\alpha \Vdash^{v}_{1} A$ 로, $v(A, \alpha) = 0$ 을 $\alpha \Vdash^{v}_{0} A$ 로 쓴다. 편의상, 우리는 종종 윗첨자 v를 생략할 것이다.

$$\alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \sqsubseteq \beta \text{ 이면, } \beta \Vdash_1 A \qquad (HC_1)$$
$$\alpha \Vdash_0 A \text{ 이고 } \alpha \sqsubseteq \beta \text{ 이면, } \beta \Vdash_0 A \qquad (HC_0)$$

복합문장을 위한 참, 거짓 조건은 다음에 의해 주어진다.

$$\alpha \Vdash_1 —A \Leftrightarrow \alpha \Vdash_0 A \qquad (—_1)$$

$$\alpha \Vdash_0 -A \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_1 A \qquad (-_0)$$

$$\alpha \Vdash_1 A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\wedge_1)$$

$$\alpha \Vdash_0 A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_0 A \text{ 또는 } \alpha \Vdash_0 B \qquad (\wedge_0)$$

$$\alpha \Vdash_1 A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_1 A \text{ 또는 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\vee_1)$$

$$\alpha \Vdash_0 A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_0 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_0 B \qquad (\vee_0)$$

$$\alpha \Vdash_1 A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \sqsupseteq \alpha (\beta \Vdash_1 A \text{ 이면, } \beta \Vdash_1 B) \qquad (\rightarrow_1)$$

$$\alpha \Vdash_0 A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\rightarrow_0)$$

우리는 $(\rightarrow_1)$**을 진리 보존**truth preservation**으로,** $(\rightarrow_0)$**을 반례**counter example**로 부를 것이다.**

문장 A**는 프레임** S = (ζ, U, ⊑) **에서** BN_1-***타당****valid***하다는** ∀v ∈ $\mathbf{Val}_{BN1}$, ζ $\Vdash^v_1$ A **와 동치**iff**이다. 이제** Σ**를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장** A**는** BN_1-**타당**valid**하다,** $\vDash_{BN1}$ A, **는** ∀S ∈ Σ, A**는** S**에서** BN_1-**타당**valid**하다와 동치이다.**

BNc_1**을 위해서 우리는** ⊑**이 다음의 의미에서** ***연결된****connected* **프레임들을 고려한다.**

임의의 α, β ∈ U, α ⊑ β **이거나** β ⊑ α **이다.**

선형 순서*linear order***는 연결된 부분 순서**connected partial order**이다. 그렇다면** ***선형*****-프레임은** ζ ∈ U **와** ⊑**이** U **위에서 선형 순서인 구조** S = (ζ, U, ⊑) **이다. (매개된**parameterized) BNc_1-**진리치**evaluation**는 다음을 취한다는 것을 제외하고** BN_1**과 같은 조건을 만족하는 문장** × U **로부터 Dunn 으로의 함수** v(A, α) **이다.**

$$\alpha \Vdash_0 A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i) } \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B, \text{ 또는} \qquad (\rightarrow_0)$$
$$\text{(ii) } \alpha \nVdash_0 A \rightarrow B$$

$\mathbf{Val}_{BNc1}$**에 의해 우리는 이러한 진리치들의 집합을 지시한다.**

문장 A**는 프레임** S = (ζ, U, ⊑) **에서** BNc_1-***타당****valid***하다는** ∀v ∈ $\mathbf{Val}_{BNc1}$, ζ $\Vdash^v_1$ A **와 동치**iff**이다. 이제** T**를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장** A**는** BNc_1-**타당**valid**하다,** $\vDash_{BNc1}$ A, **는** ∀S ∈ T, A**는** S**에서** BNc_1-**타당**valid**하다와 동치이다.**

BN_1(또는 BNc_1)을 위해 주어진 모델 $\mathbb{M}_{BN1}$(또는 $\mathbb{M}_{BNc1}$)에 대해서, 우리는 ($\vDash_1$에 상응하는 단순 진리 보존) 귀결을 다음으로 정의할 수 있다.

[정의3.3.1] $\Gamma \vDash_{BN1} A$(또는 $\Gamma \vDash_{BNc1} A$) 은 모든 모델 $\mathbb{M} = (\zeta, U, \sqsubseteq, v) \in \mathbb{M}_{BN1}$(또는 $\mathbb{M}_{BNc1}$) 에 대해, 만약 모든 $B \in \Gamma$ 에 대해 $\zeta \Vdash^{v}_{1} B$ 이면 $\zeta \Vdash^{v}_{1} A$ 이다와 동치iff이다.

3.4. BN_1과 BNc_1의 완전성

BN_1과 BNc_1의 완전성 증명을 위해서 우리는 다소의 정의와 명제를 필요로 한다. 우리는 [11]의 [정의22]에서 [보조정리29]를 흉내냄으로써 이 작업을 완수한다. 앞서 언급한 대로 이 작업은 단지 다양한 논리를 다루는 일반적 문맥이 아닌 구체적 문맥에서 논의를 수행한다는 점에서만 [11]과 구분된다. 특별히 구분할 필요가 없는 한 $BN_{(C)1}$을 통해 우리는 두 논리 체계를 함께 나타낸다.

우리는 $\vdash_{BN(c)1}$ 를 논리 $BN_{(C)1}$의 연역가능성deducibility 귀결 관계로 해석한다. *$BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 연역가능성 아래 닫힌 문장들의 집합 T를 의미한다 (만약 $A \in T$ 이고 $A \vdash_{BN(c)1} B$ 이면, $B \in T$ 이다). *원초적primary $BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 $A \vee B \in T$ 이면 $A \in T$이거나 $B \in T$인 이론을 의미한다. *사소한trivial $BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 $BN_{(C)1}$의 전 문장 집합을 의미한다. $BN_{(C)1}$-이론 T는 $BN_{(C)1}$의 모든 정리들을 포함하고 그래서 (T는) 공집합이 될 수 없다는 것에 주목할 필요가 있다. $BN_{(C)1}$-이론은 선접disjunction 아래 닫혀있다.

이제 *표준canonical $BN_{(C)1}$-프레임*을 ζ_{can}이 원초적 $BN_{(C)1}$-이론이고 U_{can}이 ζ_{can}을 확장하는 원초적 $BN_{(C)1}$-이론들의 집합 그리고 $\sqsubseteq_{can}$이 U_{can}에 제약된 $\sqsubseteq$인 구조 $(\zeta_{can}, U_{can}, \sqsubseteq_{can})$ 라고 하자. 먼저 다음 두 명제는 자명하다.

[명제3.4.1] 표준canonical $BN_{(C)1}$-프레임은 부분적으로 순서 지어진다partially ordered.

[명제3.4.2] 체계 BNc_1에 대해서 표준 프레임은 연관된다 (그래서 선형적으로 순서 지어진다linearly ordered).

이제 우리는 다음과 같은 $BN_{(C)1}$의 린덴바움Lindenbaum 보조정리를 얻을 수 있다.

[명제3.4.3] (**린덴바움 보조정리**) **만약** $\Gamma \nvdash_{BN(c)1} A$ **이면**, $\Gamma \subseteq \zeta$ **이고** $A \not\in \zeta$ **인 원초적 이론이 있다**.

증명; $BN_{(C)1}$**의 잘 정식화된 식들의 열거** $\{A_n : n \in \omega\}$ **를 취하자. 우리는 귀납에 의해 집합들의 열**a sequence of sets**을 다음처럼 정의한다**.

$$\zeta_0 = \{A' : \vdash_{BN(c)1} A'\}.$$
$$\zeta_{i+1} = \begin{cases} Th(\zeta_i \cup \{A_{i+1}\}) & \zeta_0, A_{i+1} \vdash_{BN(c)1} A \text{ 이 경우가 아닐 때,} \\ \zeta_i & \text{그 외} \end{cases}$$

이제 ζ**가 이러한** ζ_n**들 전부의 합**union**이라고 하자. 그러면** ζ**가** A**를 포함하지 않는 이론**theory**라는 것을 쉽게 알 수 있다. 우리는 또한 그것이** prime**이라는 것을 보일 수 있다**.

모순을 끌어내기 위해 $B \vee C \in \zeta$ **이고** $B, C \not\in \zeta$**을 가정하자. 그렇다면** $\zeta \cup B$ **와** $\zeta \cup C$ **로부터 얻어진 이론들 모두** A**를 포함해야한다. 이로부터** $\zeta' \wedge B \vdash_{BN(c)1} A$ **이고** $\zeta' \wedge C \vdash_{BN(c)1} A$ **인** ζ**의 원소들의 연언**conjunction ζ'**이 있다는 것이 따라나온다. 그렇다면 선언지 제거**$\vee$-elimination**에 의해** $(\zeta' \wedge B) \vee (\zeta' \wedge C) \vdash_{BN(c)1} A$**을 얻게되고, 다시 분배법칙**distributive law**에 의해** $\zeta' \wedge (B \vee C) \vdash_{BN(c)1} A$**를 얻는다. 이로부터** $A \in \zeta$**를 얻을 수 있고 이는 가정과 모순된다**. ■

이제 표준 진리치canonical evaluation**를 다음으로 정의하자**.

$$1 \in v_{can}(A, \alpha) \iff A \in \alpha,$$
$$0 \in v_{can}(A, \alpha) \iff -A \in \alpha,$$

이로부터 $BN_{(C)1}$**의 완전성을 위한 다음 보조정리를 얻을 수 있다**.

[보조정리3.4.4] (**표준 진리치 보조정리**) v_{can}**은 진리치**evaluation**이다**.

증명; **던** [11], [**보조정리**29]**에 의해**. ■

이제 우리는 $BN_{(C)1}$의 강한strong 건전성soundness과 완전성completeness을 증명할 수 있다.

[정리3.4.5] ([11], $BN_{(C)1}$을 위한 강한 건전성과 완전) $BN_{(C)1}$에 대하여,

$\Gamma \vdash_{BN(c)1} A$ 은 $\Gamma \vDash_{BN(c)1} A$ 과 동치iff이다.

증명; (개관) (←) [명제3.4.3](린덴바움 보조정리)과 [보조정리3.4.4](표준 진리치 보조정리)를 적용함으로써 $BN_{(C)1}$의 완전성을 얻는다.

(→) 건전성은 상응하는 모델에서 각 공리의 타당성 입증verification을 통해 증명된다. ■

4. BNc_1과 $LŁC^+$

구문론에 관한 한 BNc_1은 $LŁC^+$의 확장 체계에 해당한다. 이를 분명히 하기 위하여 우리는 BNc_1의 문장들을 $LŁC^+$의 문장으로 보내는maps BNc1으로부터 LŁC+으로의 번역translations을 시도한다.[7] 고전 명제논리로부터 직관주의의 명제논리로의 겐첸Gentzen 번역([15])을 좇아 우리는 이 작업을 완성한다. 우리는 먼저 다음의 번역에 관한 정의를 필요로 한다.

[정의4.1] 명제계산 **L**로부터 명제계산 **M**으로의 *정리보존함수 theorem-preserving map*는 다음을 만족하는 L_L 로부터 L_M 으로의 함수 * 이다: 모든 A에 대해,

$\vdash_L A$ 는 $\vdash_M A^*$ 와 동치iff이다.

다음을 만족하는 함수는 *번역translation*이다: 모든 Γ, A에 대해,

$\Gamma \vdash_L A$ 는 $\Gamma^* \vdash_M A^*$ 와 동치iff이다.

우리는 **L**로부터 **M**으로의 (이러한) 번역이 있다면, **L** ↣ **M** 으로 표시한다.

[정의4.2] $^-$ 는 다음 규칙에 따라 BNc_1의 모든 문장들을 $LŁC^+$의 문장들로 귀납적으로 보내는inductively maps BNc_1으로부터 $LŁC^+$로의 번역이다:

---

7) 번역에 관한 이해를 위해선 [13], X장을 참조할 것.

(i) A가 문장변항일 경우, A^- = ¬¬A;
(ii) A = —B 라면, A^- = $\neg B^-$;
(iii) A = B∧C 라면, A^- = $B^- \wedge C^-$;
(iv) A = B∨C 라면, A^- = $\neg(\neg B^- \wedge \neg C^-)$;
(v) A = B→C 라면, A^- = $B^- \rightarrow C^-$.

아래 [정리4.3]을 증명하기 위해 우리는 $LŁC^+$ (또는 LC) 의 다음 정리를 사용한다.

(1) A → ¬¬A,
(2) ¬(A∨B) ↔ (¬A∧¬B),
(3) (A→B) → (¬B→¬A),
(4) (A∧¬B) → ¬(A→B),
(5) A→(¬A→B).

[정리4.3] BNc_1의 임의의 문장 A에 대하여, A가 BNc_1의 정리라는 것은 A^*이 $LŁC^+$의 정리라는 것과 동치iff이다.

증명; (⟸) $\vdash_{LŁC+}$ A^- 라고 하자. 그렇다면, (1)과 MP에 의해 $\vdash_{LŁC+}$ $\neg\neg A^-$ 을 얻는다. $LŁC^+ \subseteq BNc_1$ 이기 때문에, 만약 $\vdash_{LŁC+}$ $\neg\neg A^-$ 이라면 $\vdash_{BNc1}$ ——A^- 이다. 따라서 $\vdash_{BNc1}$ ——A 이고 공리 VIII와 MP에 의해 $\vdash_{BNc1}$ A 를 얻는다.

(⟹) BNc_1의 증명 길이 위에서의 귀납에 의해 우리는 이를 증명한다. 그러나 두 체계가 같은 추론 규칙과 연역 정리를 갖기 때문에 우리는 BNc_1의 공리 도식의 사례들이 $LŁC^+$의 정리로 번역될 수 있음을 보이는 것으로 충분하다. 즉, 우리는 BNc_1의 증명 길이 1 단계만을 고려할 필요가 있다. BNc_1을 위한 공리 도식 I 에서 VII 까지가 $LŁC^+$을 위한 공리 도식 A1 에서 A7 으로 번역될 수 있다는 것은 자명하다. VIII, IX 는 다음과 같이 번역될 수 있다. VIII에 대하여 우리는 $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬A ↔ ¬¬¬¬A 을 보여야한다. (i) $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬A → ¬¬¬¬A 은 (1)에 의해 성립한다. (ii) $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬¬¬A → ¬¬A 은 [13]의 7장 [귀결5.e]에 의해 성립한다. IX에 대하여 우리는 $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A∨¬¬B) ↔ (¬¬¬A∧¬¬

¬B) **을 보여야한다**. **이는** (2)**에 의해 성립한다**. X, XI **은 다음과 같이 번역될 수 있다**.

X **에 대하여 우리는** $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A∧¬¬B) ↔ ¬(¬¬¬¬A∧¬¬¬¬B) **을 보여야한다**.

(i) $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B) → (¬¬A∧¬¬¬B)

1. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬¬¬A∧¬¬¬¬B (**가정**)
2. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬¬¬A (1, III, MP)
3. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬A (2, [13] 7**장** [**귀결**5.e], MP)
4. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬B (3**과 유사하게**)
5. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬A∧¬¬B (3, 4, AD)
6. $\vdash_{LŁC+}$ (¬¬¬¬A∧¬¬¬¬B) → (¬¬A∧¬¬B) (1, 5)
7. $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A∧¬¬B) → ¬(¬¬¬¬A∧¬¬¬¬B) (6, (3), MP)

(ii) $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬¬¬A∧¬¬¬¬B) → ¬(¬¬A∧¬¬B). (i)**과 유사하게**.

XI **에 대하여 우리는** $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B) ↔ (¬¬A∧¬¬¬B) **을 보여야한다**. (i) $\vdash_{LŁC+}$ (¬¬A∧¬¬¬B) → ¬(¬¬A→¬¬B) **은** (4)**에 의해 성립한다**.

(ii) $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B) → (¬¬A∧¬¬¬B)

1. $\vdash_{LŁC+}$ ¬A→(¬¬A→¬¬B) ((5))
2. $\vdash_{LŁC+}$ ¬¬B→(¬¬A→¬¬B) (I)
3. $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B)→¬¬A (1, (3), MP)
4. $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B)→¬¬¬B (2, (3), MP)
5. $\vdash_{LŁC+}$ ¬(¬¬A→¬¬B) → (¬¬A∧¬¬¬B) (3, 4, IV, MP) ■

5. 맺는 말: 남은 과제

우리는 이 글에서 LŁC^+의 완전성을 아직 다루지 않았다. 만약 우리가 2장에서 LŁC^+의 완전성을 보였다면 타당성 보존 함수에 해당하는 모델을 통한 BNc_1 으로부터 LŁC^+ 으로의 번역을 보일 수 있다. 이는 다른 지면을 통해서 분명하게 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] Almukdad, A. and Nelson, D., “Constructable falsity and inexact predicates”, *The Journal of symbolic Logic*, 49 (1984), pp. 231-233.

[2] Belnap, N. D., “A useful four-valued logic”, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, J. M. Dunn and G. Epstein (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8-37.

[3] ___________, “How a computer should think”, *Contemporary Aspects of Philosophy*, G. Ryle (eds.), Stocksfield, Oriel Press Ltd, 1977, pp. 30-55.

[4] Bimbo, K. and Dunn, J. M., “Four-valued logic”, (*The Journal of symbolic Logic*, 49 (1984), pp. 231-233.)

[5] Dunn. J. M., “The effective equivalence of certain propositions about De Morgan lattices“, *The Journal of symbolic Logic*, 32 (1967), pp. 433-434.

[6] _________, “Natural language versus formal language”, unpublished manuscript, *Presented at the Joint APA-ASL symposium* (1969), New York.

[7] _________, “Intensional algebras”, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1, A. R. Anderson and N. D. Belnap, Princeton, Princeton Univ. Press, 1975, pp. 180-206.

[8] _________, “Intuitive semantics for first degree entailments”, *Philosophical Studies*, 29 (1976), pp. 149-168.

[9] _________, “A Theorem in 3-valued model theory with connections to number theory, type theory, and relevant logic”, *Studia Logica*, 38 (1979), pp.

149-169.

[10] ________, “Relevance logic and entailment”, *Handbook of Philosophical Logic*, D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1986, pp. 117-224.

[11] ________, “Partiality and its Dual”, *Studia Logica*, 65 (2000), pp. 5-40.

[12] ________ and Meyer, R. K., “Algebraic Completeness Results for Dummetts LC and Its Extension”, *Zeitschrift Für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 17 (1971), pp. 225-230.

[13] Epstein, R. L., *The Semantic Foundations of Logic: Propositional Logics*, vol I, New York, Oxford Univ. Press, 1995.

[14] Fine, K., “Models for entailment”, *Journal of Philosophical Logic*, 3 (1974), pp. 347-372.

[15] Gentzen, G., "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Analen*, 112 (1936), pp. 493-565.

[16] Kripke, S., “Semantic analysis of intuitionistic logic I”, *Formal Systmems and Recursive Functions*, J. Crossley and M. Dummett (eds.), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1965. pp. 92-129.

[17] Nelson, D., “Constructable falsity“, *The Journal of symbolic Logic*, 14 (1949), pp. 16-26.

[18] Resher, N., *Many-valued Logic*, New York, McGraw-Hill, 1969.

[19] Restall, G., “Four-valued semantics for relevant logics (and some of their rivals)”, *Journal of Philosophical Logic*, 24 (1995), pp. 139-160.

[20] Slaney, J., Surendonk, T., and Girle, R., "Time, truth, and logic", *Technical Report TR-ARP-11/89*, Automated Reasoning Project, Australian national Uiversity, Canberra, 1989.

[21] Thomason, R. H., "A semantic study of constructive falsity", *Zeitschrft Für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 15 (1969), pp. 247-257.

[22] Yang, E., "LŁC and algebraic completeness of its extensions", submitted, 200+.